

LES NOUVEAUX

# Précis

BRÉAL

Physique

# Électromagnétisme

MPSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. KREMPF

Nouveau programme



Copyrighted material





LES NOUVEAUX  
**Précis**  
BRÉAL

# Électromagnétisme

**MPSI**

**P. KREMPF**

Professeur aux classes préparatoires à CPE Lyon

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex



Copyrighted material

LES NOUVEAUX  
**Précis**  
B R É A L

**Mathématiques 1<sup>re</sup> année**

- Analyse / MPSI
- Algèbre et géométrie / MPSI

**Physique 1<sup>re</sup> année**

- Mécanique / MPSI
- Électromagnétisme / MPSI
- Électrocinétique / MPSI
- Optique / MPSI-PCSI-PTSI
- Thermodynamique / MPSI

**Chimie 1<sup>re</sup> année**

- Chimie / MPSI

**Exercices 1<sup>re</sup> année**

- Mathématiques / MPSI
- Physique / MPSI

*Maquette : Sophie Martinet*

*Couverture : Sophie Martinet*

*Édition : Agnès Nicol*

*Mise en pages et illustrations : Suka 22*

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : septembre 2003.

ISBN 2 7495 0226 8

**L**es Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de première année de la filière MPSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les *solutions* détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ♀ ou ⚠). Certains exercices sont accompagnés de courtes *indications*, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MPSI disposeront, en électromagnétisme, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette première année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à accéder avec confiance en deuxième année et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse [infos@editions-breial.fr](mailto:infos@editions-breial.fr).

L'éditeur et les auteurs

This One



LUHA-X3Q-XL31



# Sommaire

<b>Chapitre 1 ■ La loi de Coulomb</b> .....	<b>7</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	16
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	20
<b>Chapitre 2 ■ Le champ électrostatique</b> .....	<b>33</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	45
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	50
<b>Chapitre 3 ■ Potentiel et énergie potentielle électrostatiques</b> .....	<b>67</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	77
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	82
<b>Chapitre 4 ■ Deux dispositifs électrostatiques</b> .....	<b>97</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	104
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	107
<b>Chapitre 5 ■ Analogie avec la gravitation</b> .....	<b>115</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	125
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	130
<b>Chapitre 6 ■ Le champ magnétique</b> .....	<b>141</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	153
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	158
<b>Chapitre 7 ■ Mouvement de particules chargées</b> .....	<b>169</b>
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i> .....	175
<i>Exercices : énoncés, solutions</i> .....	179
<b>I n d e x</b> .....	<b>190</b>



**Introduction**

C'est à partir de la loi de Coulomb, qui décrit l'interaction entre deux charges électriques ponctuelles, que toute la théorie de l'électrostatique s'est construite.

Outre l'énoncé de cette loi, le premier chapitre décrit les types de distributions de charges rencontrés ultérieurement dans le cours d'électrostatique ; il introduit de surcroît l'outil de calcul associé (les intégrales multiples) et pose les propriétés fondamentales des systèmes étudiés (conservation de la charge, principe de superposition).

En mécanique « classique », la loi de la gravitation universelle a une forme mathématique similaire à la loi de Coulomb, ce qui permet de traiter les problèmes de gravitation (attraction entre masses) de la même manière que les problèmes d'électrostatique (attraction-répulsion entre charges).

**Plan du chapitre 1****A. Interactions de deux charges électriques**

- |  |   |
|--|---|
| 1. Énoncé et conséquences de la loi de Coulomb ..... | 8 |
| 2. Mise en évidence expérimentale .....              | 8 |

**B. Les charges électriques**

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1. Les particules chargées. ....   | 9 |
| 2. Les échelles de grandeur .....  | 9 |
| 3. Charge d'une distribution ..... | 9 |

**C. Intégrales et systèmes de coordonnées**

- |                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 1. Systèmes de coordonnées ..... | 11 |
| 2. Intégrales multiples. ....    | 13 |

**D. Analogie et propriétés fondamentales**

- |   |    |
|---|----|
| 1. Analogie : la loi de gravitation universelle ..... | 14 |
| 2. Conservation de la charge électrique .....         | 14 |
| 3. Principe de superposition .....                    | 15 |

**Méthodes**

- |                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| L'essentiel ; mise en œuvre ..... | 16 |
|-----------------------------------|----|

<i>Énoncés des exercices</i> .....	20
------------------------------------	----

<i>Indications</i> .....	21
--------------------------	----

<i>Solutions des exercices</i> .....	22
--------------------------------------	----

1. Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), physicien français, établit les lois théoriques et expérimentales de l'électrostatique.

2. Dans les problèmes d'électrostatique, l'air est très souvent assimilé au vide.

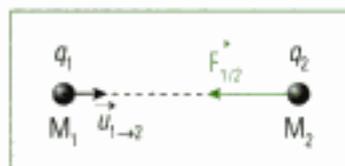


Fig. 1 - Force de Coulomb exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  ( $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposés).

3. On a :  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  (d'après la deuxième loi de Newton) et  $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$  (d'après la définition de l'intensité du courant électrique).

4. On parle aussi de « principe de l'action et de la réaction ».

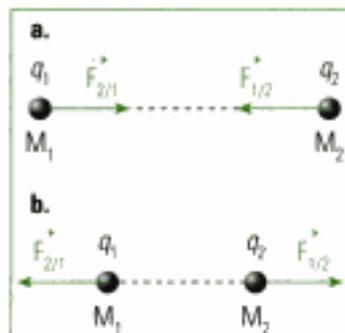


Fig. 2 - a. Les charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes contraires.  
b. Les charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe.

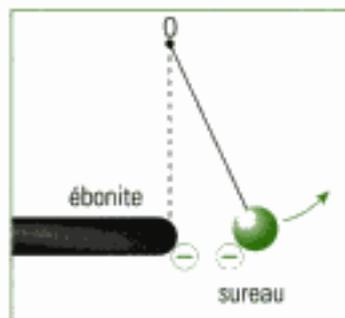


Fig. 3 - Après contact, le bâton et la sphère sont chargés négativement ; la sphère s'écarte du bâton.

5. L'exercice 6 reprend cette manipulation dans une étude quantitative.

## A. Interactions de deux charges électriques

### A.1. Énoncé et conséquences de la loi de Coulomb

• La loi de Coulomb<sup>1</sup> décrit l'interaction entre deux charges électriques ponctuelles immobiles dans le vide<sup>2</sup>. Soit la charge  $q_1$ , placée au point  $M_1$ , et la charge  $q_2$ , placée au point  $M_2$ .

#### Loi 1

##### Loi de Coulomb

La force  $\vec{F}_{1/2}$  exercée par la charge ponctuelle  $q_1$  sur la charge ponctuelle  $q_2$  a pour expression (fig. 1) :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{1/2}$ force en newton (N)
$q_1$ et $q_2$ charges en coulomb (C)
$r_{12} = M_1 M_2$ distance en mètre (m)
$\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ vecteur unitaire (sans dimension)

– La constante  $k$  dépend du milieu. Dans le vide, elle vaut :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}, \text{ où } \epsilon_0 \text{ est la permittivité absolue du vide.}$$

L'unité de  $k$  se retrouve à partir de l'expression de la force d'interaction électrostatique<sup>3</sup> :

$$k = \frac{F_{1/2} r_{12}^2}{q_1 q_2} \text{ se mesure en } \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^2}{(\text{A} \cdot \text{s})^2} = \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-2}.$$

– Le vecteur unitaire  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  est orienté de  $M_1$  vers  $M_2$  sur la droite  $(M_1 M_2)$  :

$$\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}.$$

• De même, la charge  $q_1$  subit de la part de la charge  $q_2$  la force :

$$\vec{F}_{2/1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = -k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{1/2}.$$

Ce résultat est prévisible, car il exprime la troisième loi de Newton de la mécanique, aussi appelée principe des actions réciproques<sup>4</sup>.

Deux charges  $q_1$  et  $q_2$  de même signe se repoussent, alors que deux charges  $q_1$  et  $q_2$  de signes contraires s'attirent (fig. 2).

### A.2. Mise en évidence expérimentale

On suspend une boule de sureau, initialement neutre, à une potence avec un fil. On électrise ensuite négativement un bâton d'ébonite en le frottant avec une peau de chat, puis on approche le bâton de la boule jusqu'à la toucher : lorsque le contact a lieu, une fraction de la charge portée par le bâton passe sur la sphère. Le bâton et la sphère, portant des charges de même signe, se repoussent (loi de Coulomb) : la sphère s'écarte alors immédiatement du bâton<sup>5</sup> (fig. 3).

## B. Les charges électriques

### B.1. Les particules chargées

• L'existence de charges électriques dans la matière est pressentie dès l'Antiquité, puisque les grecs Thalès de Milet (625-547 av. J.-C.) et Platon (427-347 av. J.-C.), remarquent qu'il est possible d'attirer des corps légers en frottant de l'ambre. L'allemand Otto de Guericke (1602-1686) généralise le phénomène d'attraction par frottement à un grand nombre de corps, avant que le français Charles François de Cisternay Du Fay (1698-1737) ne mette en évidence deux formes d'électricité : l'une, « positive », obtenue en frottant des corps transparents comme le verre ou le cristal ; l'autre, « négative », obtenue en utilisant l'ambre ou les corps résineux. Certains corps s'attirent, tandis que d'autres se repoussent : Charles Augustin de Coulomb énonce alors, en 1785, la loi d'interaction entre ces deux types de charges<sup>6</sup>.

• Au début du <sup>xx</sup>e siècle, l'anglais Joseph John Thomson (1856-1940) découvre le proton en étudiant l'hydrogène. Il en déduit la présence dans l'atome de deux types de charges élémentaires, indivisibles et opposées, de valeur absolue  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. En 1920, l'anglais Ernest Rutherford (1871-1937) élabore un modèle dans lequel les atomes sont constitués de protons et d'électrons.

• En 1964, l'américain Murray Gell-Mann (né en 1929) propose une théorie selon laquelle les protons, notamment, sont bâtis à partir d'entités encore plus petites, appelées *quarks*. Ces particules élémentaires, dont l'existence a été prouvée dans les années 1970-1980 grâce aux accélérateurs de haute énergie, portent des charges inférieures à  $e$  ( $+\frac{2}{3}e$  ou  $-\frac{1}{3}e$ ). La recherche actuelle s'occupe à les référencer et à comprendre leur comportement dans les réactions nucléaires<sup>7</sup>.

### B.2. Les échelles de grandeur

L'être humain ressent les effets électriques à son échelle, le mètre ou le centimètre, tout au plus le millimètre. En revanche, les échelles de grandeur du quark ou de l'électron ( $10^{-19}$  m), du proton ou du noyau atomique ( $10^{-15}$  m à  $10^{-14}$  m), de l'atome ( $10^{-10}$  m) ou des molécules ( $10^{-9}$  m), sont inaccessibles à ses sens. Il ne perçoit donc pas la répartition discontinue des charges électriques sur les atomes, mais uniquement les effets macroscopiques dus à un excès de charges, positives ou négatives, dans une région donnée de l'espace.

– Si l'excès de charges possède une étendue microscopique dans l'espace, alors la charge est considérée comme ponctuelle.

– Si l'excès de charges semble réparti sur une ligne, sur une surface ou dans un volume, alors on considère une distribution de charges linéique, surfacique (ou superficielle) ou volumique. L'échelle de la discontinuité des charges étant microscopique, ces distributions sont continues.

À l'échelle macroscopique, les distributions linéique, surfacique ou volumique de charges sont toujours **continues**.

### B.3. Charge totale d'une distribution

On exprime la charge totale  $Q$  d'une distribution de charges en fonction de la densité linéique, surfacique ou volumique de cette distribution.

6. On peut électriser un corps :  
– par frottement (bâton d'ébonite) ;  
– par contact (toucher un corps neutre avec un autre corps chargé produit un transfert de charges) ;  
– par influence (approcher un corps chargé d'un corps neutre produit un déplacement des charges dans celui-ci ; il reste globalement neutre, mais un excès local de charges contraires à celles du corps chargé apparaît à proximité de celui-ci, conformément à la loi de Coulomb).

7. Les quarks sont groupés par triplets pour former les particules du noyau (proton et neutron). Ils sont solidement liés à l'intérieur des nucléons par l'interaction forte, ce qui fait qu'on ne peut pas les observer individuellement. En effet, lorsqu'un quark s'éloigne des autres quarks, la force d'attraction entre eux croît démesurément : le triplet reste donc « prisonnier » à l'intérieur du nucléon. L'expérience a néanmoins prouvé que les quarks réagissent comme des particules quasi-libres lorsqu'un « projectile » très énergétique sonde leur comportement à l'intérieur du nucléon.

### B.3.1 – Distribution linéique de charges

Soit une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  le long de la ligne  $\Gamma$ . (La densité linéique  $\lambda$ , exprimée en  $C \cdot m^{-1}$ , est la charge par unité de longueur.) Sur un élément de longueur  $dl$  ( $dl$  est infinitésimal), on peut considérer la densité  $\lambda$  constante : l'élément  $dl$  porte donc la charge élémentaire  $dq = \lambda dl$  (fig. 4). La charge totale  $Q$  portée par la ligne  $\Gamma$  est alors la somme des charges élémentaires  $dq$  portées par les éléments de longueur  $dl$ .

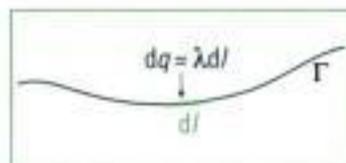


Fig. 4 - L'élément  $dl$  porte la charge élémentaire  $dq = \lambda dl$ .

La charge totale  $Q$  d'une distribution de charges le long de la ligne  $\Gamma$  vaut :

$$Q = \int_{\Gamma} dq = \int_{\Gamma} \lambda dl, \text{ avec } \lambda \text{ densité linéique de charges } (C \cdot m^{-1}).$$

L'intégrale mathématique traduit le fait que l'on effectue physiquement la somme d'un très grand nombre de termes, chacun ayant une valeur très petite, et cela de manière continue (de proche en proche).

### B.3.2 – Distribution surfacique de charges

Soit une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  sur une surface  $S$ . (La densité surfacique  $\sigma$ , exprimée en  $C \cdot m^{-2}$ , est la charge par unité de surface.) Sur un élément de surface infinitésimal  $dS$ , on peut considérer la densité  $\sigma$  constante : l'élément  $dS$  porte donc la charge élémentaire  $dq = \sigma dS$  (fig. 5). La charge totale  $Q$  portée par la surface  $S$  est alors la somme des charges élémentaires  $dq$  portées par les éléments de surface  $dS$ .

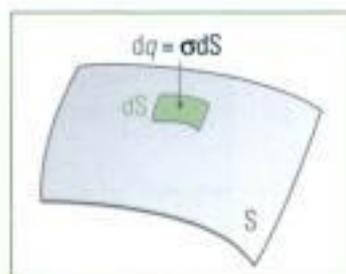


Fig. 5 - L'élément  $dS$  porte la charge élémentaire  $dq = \sigma dS$ .

La charge totale  $Q$  d'une distribution de charges sur la surface  $S$  vaut :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS, \text{ avec } \sigma \text{ densité surfacique de charges } (C \cdot m^{-2}).$$

### B.3.3 – Distribution volumique de charges

Soit une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  dans un volume  $V$ . (La densité volumique  $\rho$ , exprimée en  $C \cdot m^{-3}$ , est la charge par unité de volume.) Sur un élément de volume infinitésimal  $dV$ , on peut considérer la densité  $\rho$  constante : l'élément  $dV$  porte donc la charge élémentaire  $dq = \rho dV$  (fig. 6). La charge totale  $Q$  portée par le volume  $V$  est alors la somme des charges élémentaires  $dq$  portées par les éléments de volume  $dV$ .

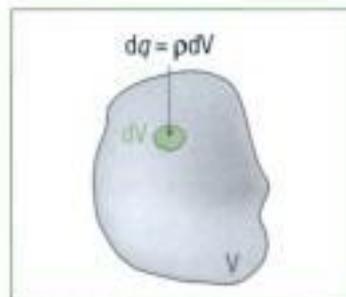


Fig. 6 - L'élément  $dV$  porte la charge élémentaire  $dq = \rho dV$ .

La charge totale  $Q$  d'une distribution de charges dans le volume  $V$  vaut :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV, \text{ avec } \rho \text{ densité volumique de charges } (C \cdot m^{-3}).$$

### B.3.4 – Cas d'une distribution de densité uniforme

• Lorsque la densité de la distribution de charges est uniforme, sa valeur est constante et elle peut être « factorisée » dans l'intégrale. Par exemple, pour une distribution volumique de densité  $\rho$  :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V.$$

En effet, la somme de tous les éléments de volume  $dV$  est égale au volume total  $V$  de la région de l'espace contenant les charges. Si la valeur du volume  $V$  est connue, alors il est inutile de calculer l'intégrale.

• On a de même :

– pour une distribution linéique de densité  $\lambda$  uniforme :

$$Q = \int_{\Gamma} dq = \int_{\Gamma} \lambda dl = \lambda \int_{\Gamma} dl = \lambda L,$$

où  $L$  est la longueur de la ligne ;

– pour une distribution surfacique de densité  $\sigma$  uniforme :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS = \sigma \iint_S dS = \sigma S,$$

où  $S$  est la surface totale.

## C. Intégrales et systèmes de coordonnées

Pour déterminer la charge totale  $Q$  d'une distribution de charges, il faut calculer une intégrale simple, double ou triple<sup>8</sup>. Lorsqu'on parcourt une ligne  $\Gamma$ , une seule variable suffit à repérer les points de cette ligne ; en revanche, il faut deux variables pour repérer les points sur une surface  $S$  et trois variables pour repérer les points dans un volume  $V$ .

Le choix du système de coordonnées est donc très important : celui-ci doit en effet être adapté à la géométrie du problème, afin de simplifier au maximum les calculs.

### C.1. Systèmes de coordonnées

#### C.1.1 – Coordonnées cartésiennes

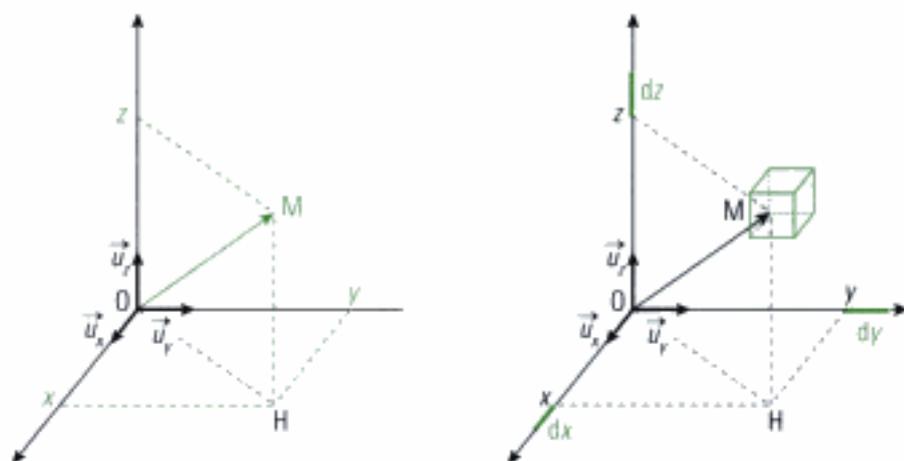


Fig. 7 - Le système de coordonnées cartésiennes.

Dans le repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . Le vecteur position du point  $M$  s'écrit alors :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Lorsque les coordonnées  $x, y$  ou  $z$  de  $M$  subissent une variation élémentaire  $dx, dy$  ou  $dz$ , le point  $M$  se déplace respectivement de  $dx \vec{u}_x, dy \vec{u}_y$  ou  $dz \vec{u}_z$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dx, dy$  et  $dz$  :

$$dV = dx \times dy \times dz.$$

8. D'après le paragraphe précédent, le calcul de cette intégrale simple, double ou triple est celui d'une longueur, d'une surface ou d'un volume si la densité de la distribution est uniforme.

### C.1.2 – Coordonnées cylindriques

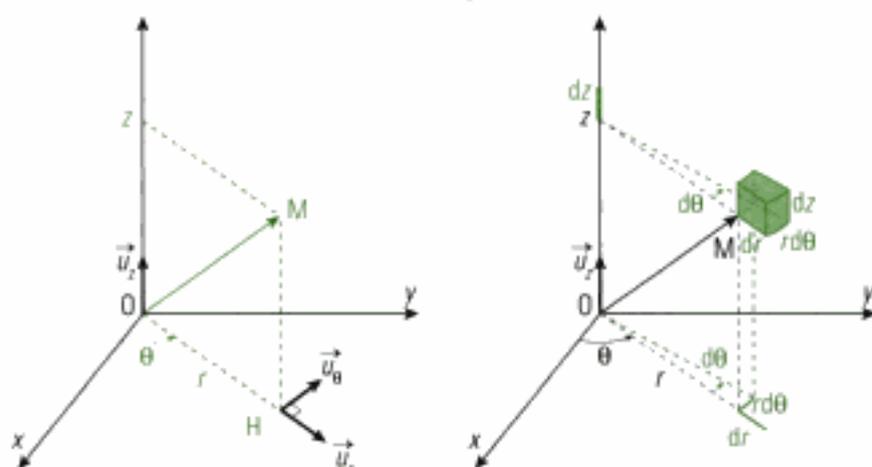


Fig. 8 - Le système de coordonnées cylindriques.

On peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (fig. 8) :

- $r$  représente la distance du point M à l'axe Oz ( $r > 0$ ) ;
- $\theta$  définit la position du point M autour de Oz ( $\theta$  angle compris entre 0 et  $2\pi$ ) ;
- $z$  représente la cote du point M.

9. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dépendent de la position du point M.

On définit la base<sup>9</sup> orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  en posant  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OH}}{OH}$  (H projection orthogonale du point M sur le plan xOy). Dans le repère orthonormé, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Lorsque les coordonnées  $r, \theta$  ou  $z$  de M subissent une variation élémentaire  $dr, d\theta$  ou  $dz$ , le point M se déplace respectivement de  $dr\vec{u}_r, r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $dz\vec{u}_z$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dr, r d\theta$  et  $dz$  :

$$dV = dr \times r d\theta \times dz.$$

### C.1.3 – Coordonnées sphériques

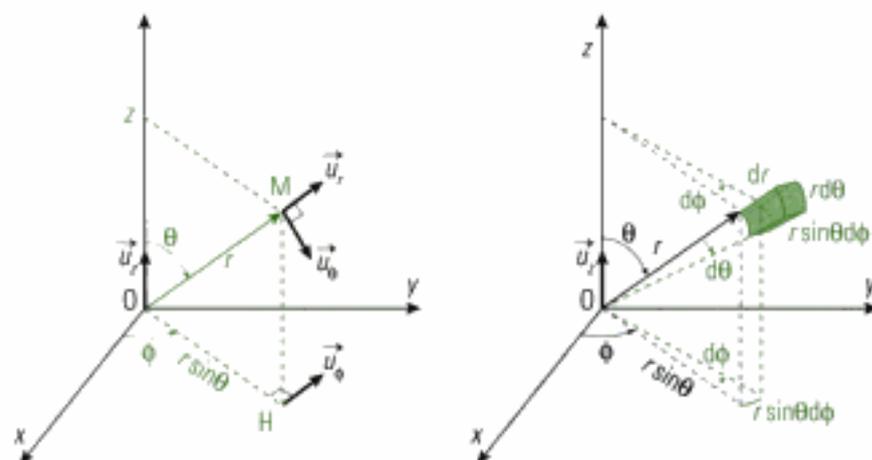


Fig. 9 - Le système de coordonnées sphériques.

Enfin, on peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  (fig. 9) :

- $r$  représente la distance du point M au point O ( $r = OM > 0$ ) ;
- $\theta$  et  $\phi$ <sup>10</sup> définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M ( $\theta$  angle compris entre 0 et  $\pi$ ,  $\phi$  angle compris entre 0 et  $2\pi$ ).

10. L'angle  $\theta$  n'est pas le même que celui des coordonnées cylindriques, car, en coordonnées sphériques, c'est l'angle  $\phi$  qui donne la position de M autour de Oz.

11. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\phi$  dépendent de la position du point M.

On définit la base<sup>11</sup> orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  en posant  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OH}}{OH}$ .

Dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ , le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

Lorsque les coordonnées  $r$ ,  $\theta$  ou  $\phi$  de M subissent une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $d\phi$ , le point M se déplace respectivement de  $dr \vec{u}_r$ ,  $r d\theta \vec{u}_\theta$  ou  $r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dr$ ,  $r d\theta$  et  $r \sin\theta d\phi$  :

$$dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

## C.2. Intégrales multiples

Lorsqu'on intègre sur une surface ou un volume, il est nécessaire de faire varier plusieurs coordonnées. Le calcul d'une telle intégrale, dans le cas général, est compliqué. Cependant, si la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est égale au produit des intégrales simples<sup>12</sup> :

$$\iiint f(x)g(y)h(z) dx dy dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \int_{y_0}^{y_1} g(y) dy \int_{z_0}^{z_1} h(z) dz.$$

En première année, cette propriété est toujours vérifiée, ce qui permet de se ramener dans tous les cas étudiés aux calculs d'intégrales simples.

12. Cette propriété est une application du théorème de Fubini.

### Application 1 Calcul d'un volume

Calculer, en utilisant une intégrale, le volume d'un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .

#### Solution

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On choisit l'axe de révolution du cylindre comme axe  $Oz$ , son origine  $O$  étant placée au centre de l'une des bases du cylindre. Un élément de volume  $dV$  s'écrit :

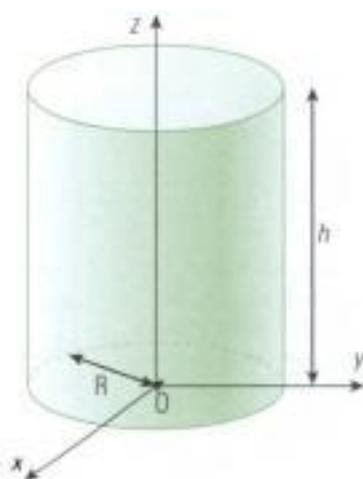
$$dV = dr \times r d\theta \times dz.$$

Le volume  $V$  est la somme de tous les éléments de volume  $dV$  :

$$V = \iiint dV = \iiint dr \times r d\theta \times dz,$$

avec  $r$  variant entre 0 et  $R$ ,  $\theta$  variant entre 0 et  $2\pi$ ,  $z$  variant entre 0 et  $h$ . Comme la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées, on a :

$$V = \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h = \frac{R^2}{2} \times 2\pi \times h = \pi R^2 h.$$



## D. Analogie et propriétés fondamentales

### D.1. Analogie : la loi de gravitation universelle

• La loi de la gravitation universelle décrit l'interaction entre deux masses ponctuelles. Soit la masse  $m_1$ , placée au point  $M_1$ , et la masse  $m_2$ , placée au point  $M_2$ .

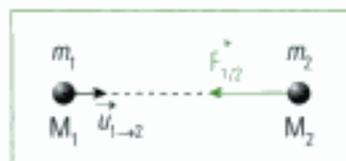


Fig. 10 - Force de gravitation exercée par la masse  $m_1$  sur la masse  $m_2$ .

Loi 2

#### Loi de la gravitation universelle

La force  $\vec{F}_{1/2}$  exercée par la charge ponctuelle  $m_1$  sur la masse ponctuelle  $m_2$  a pour expression (fig. 10) :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{1/2}$  force en newton (N)  
 $m_1$  et  $m_2$  masses en kilogramme (kg)  
 $r_{12} = M_1 M_2$  distance en mètre (m)  
 $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  vecteur unitaire (sans dimension)

- La constante  $G$  est la constante de gravitation universelle. Elle vaut :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI.}$$

L'unité de  $G$  se retrouve à partir de l'expression de la force d'attraction gravitationnelle :

$$G = \frac{F_{1/2} r_{12}^2}{m_1 m_2} \text{ se mesure en } \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

- Le vecteur unitaire  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  est orienté de  $M_1$  vers  $M_2$  sur la droite  $(M_1 M_2)$  :

$$\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}.$$

De même, la masse  $m_1$  subit de la part de la masse  $m_2$  la force :

$$\vec{F}_{2/1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{1/2}.$$

• La forme mathématique de la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses est **analogue** à celle de la force de Coulomb entre deux charges, les masses jouant le rôle des charges<sup>13</sup>. En outre, à l'échelle humaine, la répartition de la masse dans la matière est continue, ce qui permet de définir des distributions linéiques, surfaciques ou volumiques de masse. De ce fait, les problèmes de gravitation peuvent être traités de la même manière que les problèmes d'électrostatique.

13. Néanmoins, les forces gravitationnelles sont toujours attractives, alors que les forces de Coulomb sont attractives ou répulsives selon les signes des charges.

### D.2. Conservation de la charge électrique

• La charge électrique de tout système fermé (c'est-à-dire qui n'échange pas de matière avec l'extérieur) reste constante. Cette propriété a été vérifiée expérimentalement à toutes les échelles de grandeur et quelles que soient les conditions physiques. De même, la charge électrique est indépendante du référentiel dans lequel on étudie le système : on dit que la charge reste invariante dans un changement de référentiel.

La charge électrique d'un système fermé **se conserve**.

14. La masse se conserve au cours d'une transformation chimique, mais elle ne se conserve pas au cours d'une transformation nucléaire.

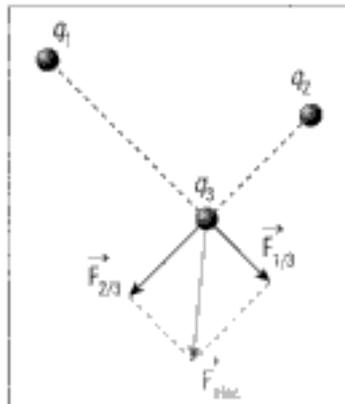


Fig. 11 - Les charges  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  ont ici le même signe.

- L'analogie entre la charge électrique et la masse inciterait à poser de même une loi de conservation de la masse. À l'échelle macroscopique, et dans les conditions de la mécanique « classique » (c'est-à-dire, non relativiste), une telle loi est vérifiée. Cependant, Albert Einstein (1879-1955) a établi en 1905 la formule célèbre  $E = mc^2$  postulant l'équivalence entre la masse et l'énergie. La conservation de la masse n'est donc pas réalisée pour tous les systèmes<sup>14</sup>.

### D.3. Principe de superposition

- Constaté expérimentalement, le principe de superposition exprime que les effets électriques s'ajoutent. Par exemple, la force totale subie par une charge  $q_3$  en interaction avec les charges  $q_1$  et  $q_2$  est la somme des forces  $\vec{F}_{1/3}$  et  $\vec{F}_{2/3}$  exercées individuellement par  $q_1$  et  $q_2$  (fig. 11) :

$$\vec{F}_{\text{elec}} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}.$$

La somme des causes produit un effet électrique égal à la somme des effets individuels.

La linéarité de toutes les équations de l'électromagnétisme vis à vis de la charge électrique traduit mathématiquement le principe de superposition.

- L'analogie entre la charge électrique et la masse permet de poser de même le principe de superposition pour les effets gravitationnels.

# L'essentiel

## ✓ Loi de Coulomb



- Deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , placées respectivement en  $M_1$  et  $M_2$ , exercent l'une sur l'autre la force donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{12}$  force en newton (N)

$q_1$  et  $q_2$  charges en coulomb (C)

$r_{12} = M_1 M_2$  distance en mètre (m)

$\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  vecteur unitaire (sans dimension)

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

En conséquence, deux charges  $q_1$  et  $q_2$  de même signe se repoussent (b.), alors que deux charges  $q_1$  et  $q_2$  de signes contraires s'attirent (a.).

- La force subie par une charge électrique de la part de plusieurs autres charges est la somme des forces exercées individuellement par chacune d'elles (principe de superposition).

- **Analogie** : la forme mathématique de la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses est analogue à celle de la force de Coulomb entre deux charges, les masses jouant le rôle des charges.

## ✓ Distribution de charges

- À l'échelle macroscopique, les distributions linéique, surfacique ou volumique de charges sont toujours continues. Le calcul de la charge totale  $Q$  revient à celui d'une intégrale simple ou multiple.

- Distribution linéique de densité  $\lambda$  (en  $C \cdot m^{-1}$ ) :

$$Q = \int_L dq = \int_L \lambda dl, \text{ avec } Q = \lambda L \text{ si la densité est uniforme.}$$

- Distribution surfacique de densité  $\sigma$  (en  $C \cdot m^{-2}$ ) :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS, \text{ avec } Q = \sigma S \text{ si la densité est uniforme.}$$

- Distribution volumique de densité  $\rho$  (en  $C \cdot m^{-3}$ ) :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV, \text{ avec } Q = \rho V \text{ si la densité est uniforme.}$$

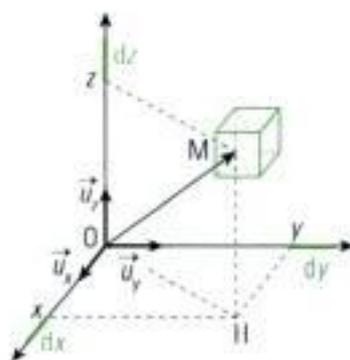
## ✓ Système de coordonnées

- En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on a :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire  $dx$ ,  $dy$  ou  $dz$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dx\vec{u}_x$ ,  $dy\vec{u}_y$  ou  $dz\vec{u}_z$ .

Élément de volume :  $dV = dx \times dy \times dz$ .

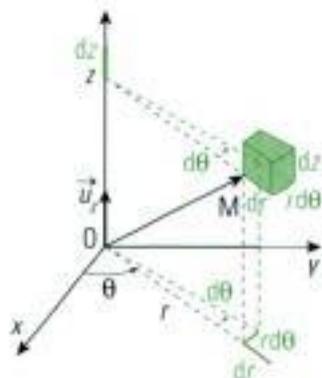


- En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , on a :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $dz$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dr\vec{u}_r$ ,  $r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $dz\vec{u}_z$ .

Élément de volume :  $dV = dr \times r d\theta \times dz$ .

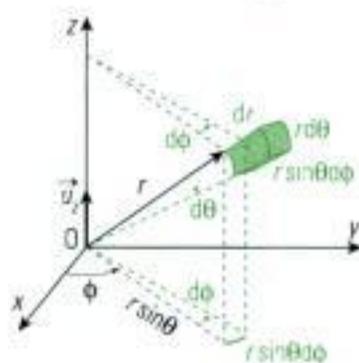


- En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , on a :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r.$$

Une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $d\phi$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dr\vec{u}_r$ ,  $r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $r \sin\theta d\phi\vec{u}_\phi$ .

Élément de volume :  $dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi$ .



- Application du théorème de Fubini :

$$\iiint f(x)g(y)h(z) dx dy dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \int_{y_0}^{y_1} g(y) dy \int_{z_0}^{z_1} h(z) dz.$$

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

### Comment déterminer la résultante des forces subies par une charge électrique de la part de plusieurs autres charges ?

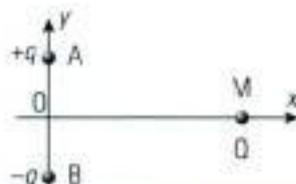
Soit une charge électrique ponctuelle  $q$  en interaction avec plusieurs autres charges. On se propose de déterminer la résultante des forces de Coulomb exercées sur  $q$ .

#### → Savoir faire

- 1 Faire le bilan de toutes les forces de Coulomb exercées sur la charge  $q$  et écrire l'expression vectorielle de chacune d'elles.
- 2 Projeter chaque force sur le système d'axes indiqué par l'énoncé (c'est-à-dire, exprimer les composantes des forces dans le repère correspondant). Si l'énoncé n'impose pas de repère, choisir le système d'axes adéquat.
- 3 Faire la somme des forces, composante par composante, en simplifiant si possible.

#### → Application

Deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  sont placées aux points A et B de l'axe Oy tels que  $OA = -OB = a\vec{u}_y$ . On se propose de déterminer les caractéristiques de la force  $\vec{F}$  subie par la charge Q placée en M tel que  $\vec{OM} = x\vec{u}_x$ .



## Solution

❶ La charge  $Q$  placée en  $M$  est soumise à deux forces :

- la force  $\vec{F}_A$  exercée par la charge  $+q$  placée en  $A$  :

$$\vec{F}_A = k \frac{qQ}{AM^2} \vec{u}_{AM} = kqQ \frac{\vec{AM}}{AM^3} ;$$

- la force  $\vec{F}_B$  exercée par la charge  $-q$  placée en  $B$  :

$$\vec{F}_B = k \frac{(-q)Q}{BM^2} \vec{u}_{BM} = -kqQ \frac{\vec{BM}}{BM^3} .$$

❷ On projette ces vecteurs sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

- $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix}$ , d'où :  $AM = \sqrt{x^2 + a^2}$  et  $\vec{F}_A = \frac{kqQ}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix}$  ;

- $\vec{BM} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$ , d'où :  $BM = \sqrt{x^2 + a^2}$  et  $\vec{F}_B = \frac{kqQ}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$ .

❸ La résultante  $\vec{F}$  des forces de Coulomb exercées sur  $Q$  s'écrit donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \frac{kqQ}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \begin{pmatrix} 2x \\ a \end{pmatrix} = \frac{2kqQ}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \vec{u}_x .$$

## Méthode n° 2

### Comment calculer une surface ou un volume au moyen d'une intégrale multiple ?

Soit une distribution de charges surfacique ou volumique et de densité uniforme. Le calcul de la charge totale  $Q$  se ramène alors au calcul d'une surface ou d'un volume.

#### → Savoir faire

- ❶ Choisir un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème et définir ses caractéristiques :
  - travailler en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  si la géométrie est « cubique » ou si aucune rotation n'apparaît ;
  - travailler en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  si la géométrie est un cylindre ou si une rotation autour d'un axe apparaît ;
  - travailler en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  si la géométrie est une sphère ou si deux rotations autour d'un point apparaissent.
- ❷ Identifier les coordonnées permettant à un point  $M$  quelconque de décrire complètement le système. Définir les bornes entre lesquelles varient chacune de ces coordonnées (vérifier l'indépendance de leurs variations).
- ❸ Pour chaque coordonnée, écrire l'élément de longueur correspondant à une variation élémentaire. En déduire l'expression de l'élément de surface ou de volume à intégrer.
- ❹ Transformer l'intégrale multiple en un produit d'intégrales simples et calculer.

#### → Application 1

Calculer, au moyen d'une intégrale double, la surface enveloppe  $S$  d'un cylindre à base circulaire de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .

## Solution

- 1 La surface est décrite par une rotation autour de l'axe d'un cylindre : on travaille donc en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On prend comme axe  $Oz$  l'axe de révolution du cylindre,  $O$  étant le centre de la base inférieure du cylindre.
- 2 Comme on calcule une surface, deux coordonnées varient. Ainsi,  $r$  reste constant ( $r = R$ ), tandis que  $\theta$  varie sur un intervalle de  $2\theta$  et  $z$  varie sur une hauteur  $h$ .
- 3 Pour une variation élémentaire  $d\theta$  et  $dz$ , l'élément de longueur s'écrit respectivement  $Rd\theta$  et  $dz$ . L'élément de surface à intégrer vaut donc :  $dS = Rd\theta \times dz$ .
- 4 La surface  $S$  se calcule par l'intégrale double :

$$S = \iint dS = \iint Rd\theta \times dz = R \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_{z=0}^h dz = R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h = 2\pi R h.$$

## → Application 2

Calculer, au moyen d'une intégrale triple, le volume  $V$  d'une sphère de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .

## Solution

- 1 Le volume est décrit notamment par deux rotations autour du centre de la sphère : on travaille donc en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . On prend comme origine  $O$  le centre de la sphère.
- 2 Comme on calcule un volume, les trois coordonnées varient. Ainsi,  $r$  varie entre 0 et  $R$ ,  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$  et  $\phi$  varie sur un intervalle de  $2\pi$ .
- 3 Pour une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  et  $d\phi$ , l'élément de longueur correspondant s'écrit respectivement  $dr$ ,  $r d\theta$  et  $r \sin\theta d\phi$ .  
L'élément de volume à intégrer vaut donc :  $dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi$ .
- 4 Le volume  $V$  se calcule par l'intégrale triple :

$$V = \iiint dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi = \int_{r=0}^R r^2 dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \times \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \times [-\cos\theta]_0^{\pi} \times [\phi]_0^{2\pi}.$$

Soit :

$$V = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

# Exercices

Dans tous les exercices, on assimile l'air au vide. Pour plus de commodité dans les calculs, on pose systématiquement :

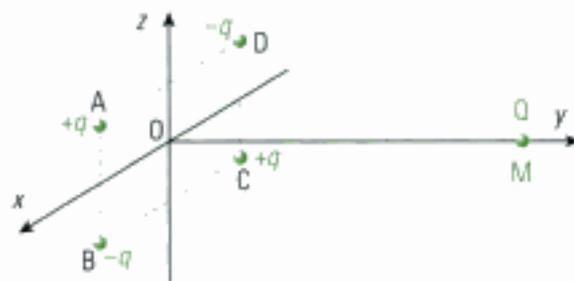
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI.}$$

( $\epsilon_0$  est la permittivité du vide).

## Niveau 1

### Ex. 1

Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue  $q$ , sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté  $2a$ , de centre O et appartenant au plan Oxz.



Déterminer l'expression de la force subie par la charge électrique Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy.

### Ex. 2

Calculer, au moyen d'une intégrale, la surface S d'une sphère de rayon R.

### Ex. 3

Un pavé parallélépipédique de côté  $a$  suivant l'axe  $x'x$ ,  $b$  suivant l'axe  $y'y$  et  $c$  suivant l'axe  $z'z$  a pour centre l'origine O du repère orthonormé  $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Il contient une densité volumique de charges  $\rho$  non uniforme :

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) \cos\left( \frac{\pi y}{b} \right) \frac{z^2}{c^2}.$$

Calculer la charge totale Q de cette distribution.

## Niveau 2

### Ex. 4 Masse volumique de la Terre

On peut supposer, dans un modèle grossier, que la répartition de la masse de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R) n'est pas uniforme : le noyau terrestre, principalement formé de fer et de nickel, est plus dense que la croûte. La masse volumique  $\rho$  dépend donc de la distance  $r$  au centre C :

$$\rho(r) = \rho_0 \left( 1 - \frac{r}{2R} \right).$$

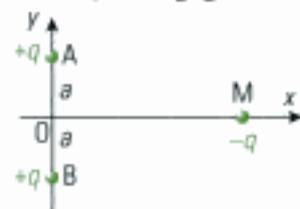
Données : la densité du fer vaut environ 8 et celle des roches granitiques vaut environ 4.

1) Exprimer la masse M de la Terre en fonction de R et  $\rho_0$ .

2) On donne  $M = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg et  $R = 6,4 \cdot 10^3$  km. Calculer numériquement la masse volumique au centre et à la surface de la Terre. Commenter.

### Ex. 5 Mouvement d'un anneau

Deux charges électriques ponctuelles identiques  $+q$  sont disposées en A et B sur l'axe Oy à une distance  $a$  du point O. Une charge  $-q$  est portée par un anneau M de masse  $m$ , assimilé à son centre d'inertie, pouvant coulisser sans frottement le long de l'axe Ox. Dans tout l'exercice, on négligera l'effet du poids.



1) Calculer la force électrique que subit l'anneau en fonction de l'abscisse  $x$  de M et des données.

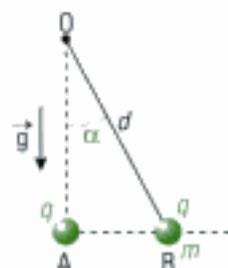
2) Déterminer la position d'équilibre de l'anneau dans le référentiel terrestre considéré galiléen et discuter sa stabilité.

3) L'anneau est écarté d'une distance  $d$  de sa position d'équilibre dans le sens des  $x$  positifs, puis lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par l'abscisse  $x$  de M.

4) En réalité, on a :  $d \ll a$ . En déduire une expression simplifiée de l'équation différentielle et la résoudre. Quel est le mouvement de l'anneau ?

### Ex. 6 Boule de sureau à l'équilibre

On communique une charge électrique  $q$  à une petite boule de sureau suspendue à l'extrémité O d'une potence immobile par un fil inextensible et sans masse. On note  $d$  la longueur du fil,  $m$  la masse de la boule considérée ponctuelle, et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur terrestre considéré



uniforme. On approche une charge ponctuelle identique  $q$ , placée au point A à la verticale de O et à l'horizontale de B, position de la boule à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Déterminer la relation vérifiée par l'angle  $\alpha$  que fait le fil avec la verticale. Sans calculer  $\alpha$ , vérifier qu'une solution existe.

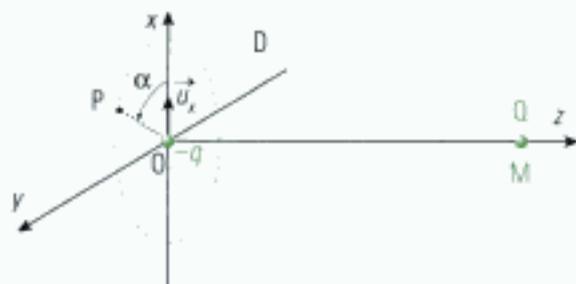
## Niveau 3

### Ex. 7 Distribution de charges

Une distribution de charges est constituée par un cerceau circulaire de rayon  $R$  et de centre  $O$ , appartenant au plan  $xOy$  et portant une densité linéique de charges non uniforme  $\lambda$ , et par une charge ponctuelle  $-q$  placée en  $O$ . La densité  $\lambda$  a pour expression au point  $P$  quelconque du cerceau :

$$\lambda = |\lambda_0 \cos \alpha|,$$

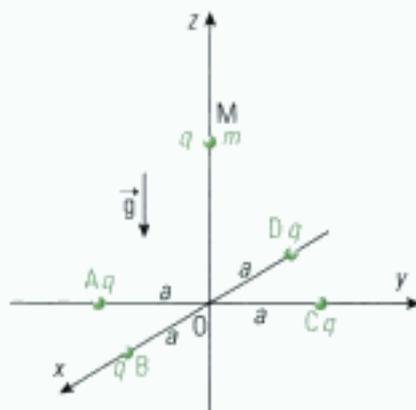
où  $\alpha$  est l'angle que fait le vecteur unitaire  $\vec{u}_s$  avec le vecteur position repérant le point  $P$ .



- 1) Quelle doit être la valeur de  $\lambda_0$  pour que la charge totale de la distribution soit nulle ? On conservera cette valeur dans la suite.
- 2) Exprimer la force  $\vec{F}$  subie par une charge ponctuelle  $Q$  placée en un point  $M$  quelconque de l'axe  $Oz$  de cote  $z$  positive.
- 3) Le cerceau est-il équivalent, pour le point  $M$ , à une charge ponctuelle  $q$  ? Si oui, indiquer sa position ; si non, expliquer pourquoi.
- 4) On étudie maintenant le cas où  $z \gg R$ . La distribution globale est-elle équivalente, pour le point  $M$ , à une charge ponctuelle dont la valeur ne dépend pas de  $M$  ? Si oui, indiquer sa position ; si non, expliquer pourquoi.

### Ex. 8 Position d'équilibre

Quatre charges électriques ponctuelles identiques  $q$  sont placées aux points  $A, B, C, D$  sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  à une distance  $a$  de l'origine  $O$  du repère orthonormé  $(O ; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On suppose que le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  est uniforme.



- 1) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrer que l'équilibre d'une masse  $m$  ponctuelle, portant la charge  $q$  et placée à une cote  $z$  sur l'axe  $Oz$ , n'est possible que si cette masse ne dépasse pas une valeur  $m_0$  à déterminer. (On ne demande pas l'expression de la cote  $z$  pour laquelle l'équilibre est possible.) Dans toute la suite, on suppose que la masse est strictement inférieure à  $m_0$ .
- 2) Montrer qu'il y a deux positions d'équilibre et étudier la stabilité de chacune d'elles.
- 3) Depuis une position d'équilibre  $z_e$ , on écarte la masse  $m$  vers le haut d'une distance  $\Delta z \ll z_e$  et on la lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par l'écartement  $\delta z$  de la masse  $m$  par rapport à la position d'équilibre  $z_e$ . Résoudre cette équation lorsque  $\delta z \ll z_e$  et donner la nature du mouvement. Conclure.

## Indications

#### Ex. 1

Projeter les vecteurs sur les axes  $Ox, Oy, Oz$  du repère orthonormé.

#### Ex. 2, 3 et 4

L'intégrale multiple du produit est égale au produit des intégrales simples.

#### Ex. 5

- 2) Définir clairement la condition de stabilité.
- 4) Faire un développement limité de la force.

#### Ex. 6

L'axe choisi pour projeter ne doit faire apparaître que la grandeur inconnue que l'on cherche à déterminer.

#### Ex. 7

2) Exprimer sous forme vectorielle la force élémentaire  $d\vec{F}$  exercée par un élément de longueur  $dl$  du cerceau, puis sommer ces forces.

4) Faire un développement limité de la force.

#### Ex. 8

1) Tracer le graphe des variations de la valeur  $\|\vec{F}\|$  de la force électrique  $\vec{F}$  en fonction de  $z$ .

3) Faire un développement limité de la force de Coulomb au voisinage de la position d'équilibre  $z_e$  pour rendre l'équation différentielle linéaire, donc plus facile à résoudre analytiquement.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1



Voir la méthode n° 1.

La force totale  $\vec{F}$  subie par la charge  $Q$  en  $M$  est la somme des forces exercées par chacune des charges ponctuelles en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D,$$

$$\text{avec } \vec{F}_A = kqQ \frac{\vec{AM}}{AM^3}, \quad \vec{F}_B = -kqQ \frac{\vec{BM}}{BM^3}, \quad \vec{F}_C = kqQ \frac{\vec{CM}}{CM^3}, \quad \vec{F}_D = -kqQ \frac{\vec{DM}}{DM^3}.$$

On projette ces vecteurs sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  :

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix}, \quad \vec{BM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{CM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{DM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}.$$



Dans le repère choisi, les points ont pour coordonnées :

$$A(a, 0, a), B(a, 0, -a), C(-a, 0, -a), D(-a, 0, a), M(0, y, 0).$$

Les distances correspondantes valent :

$$AM = BM = CM = DM = \sqrt{2a^2 + y^2}.$$

La force totale  $\vec{F}$  subie par la charge  $Q$  s'écrit donc :

$$\vec{F} = \frac{kqQ}{(\sqrt{2a^2 + y^2})^3} \left[ \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix} \right] = \frac{kqQ}{(\sqrt{2a^2 + y^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$



Dans le calcul, il ne faut pas oublier le signe « - » des charges électriques placées en  $B$  et en  $D$ .



On peut éviter ce calcul par des considérations de symétrie (traitées dans le prochain chapitre). Une symétrie par rapport au plan  $Oxy$ , contenant le point  $M$ , transforme la distribution de charges en une distribution exactement opposée, et donc la force  $\vec{F}$  en son opposée  $-\vec{F}$  :  $\vec{F}$  est donc orthogonale à ce plan. De même,  $\vec{F}$  est orthogonale au plan  $Oyz$ . La force doit donc être portée respectivement par  $Oz$  et  $Ox$ , ce qui n'est possible que pour le vecteur nul.

### Exercice 2



Voir la méthode n° 2.

Le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  est le mieux adapté à la géométrie du problème. Lorsqu'un point  $M$  décrit la surface  $S$  de la sphère, deux coordonnées varient : la distance au centre  $O$  (origine du repère des coordonnées sphériques) reste constante ( $r = R$ ), tandis que les angles  $\theta$  et  $\phi$  varient respectivement de  $0$  à  $\pi$  et de  $0$  à  $2\pi$ .

Pour une variation élémentaire  $d\theta$ , l'élément de longueur s'écrit  $Rd\theta$  ; pour une variation  $d\phi$ , il s'écrit  $R\sin\theta d\phi$ . L'élément de surface à intégrer vaut donc :  $dS = Rd\theta \times R\sin\theta d\phi$ . La surface  $S$  totale est la somme des surfaces élémentaires :

$$S = \int dS = \iint Rd\theta \times R\sin\theta d\phi = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 \times [\theta]_0^\pi \times [\phi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2.$$



Grâce à un choix judicieux du système de coordonnées, les bornes d'intégration des deux variables  $\theta$  et  $\phi$  sont indépendantes. On transforme donc l'intégrale double en un produit de deux intégrales simples, plus aisément calculable.

### Exercice 3



Lorsque la densité de charges n'est pas uniforme, on choisit un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème comme dans la méthode n° 2. On aboutit alors au calcul d'une intégrale multiple dans laquelle le terme correspondant à la densité doit être exprimé en fonction de ces coordonnées.

La distribution de charges possède une géométrie « rectangulaire » : le système de coordonnées le mieux adapté est donc le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  proposé par l'énoncé.

Lorsqu'un point  $M$  décrit le volume  $V$  du pavé,  $x$  varie de  $-\frac{a}{2}$  à  $\frac{a}{2}$ ,  $y$  varie de  $-\frac{b}{2}$  à  $\frac{b}{2}$  et  $z$  varie de  $-\frac{c}{2}$  à  $\frac{c}{2}$ .

L'élément de volume  $dV$  défini par une variation élémentaire  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  de chaque coordonnée est un parallélépipède rectangle de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  contenant la charge élémentaire :  $dQ = \rho dV = \rho dx \times dy \times dz$ . La charge  $Q$  totale est alors la somme des charges élémentaires :

$$Q = \iiint dQ = \iiint \rho_0 \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) \cos\left( \frac{\pi y}{b} \right) \frac{z^2}{c^2} dx \times dy \times dz.$$



La densité volumique de charges  $\rho$  est bien exprimée dans le système de coordonnées cartésiennes.

L'intégrale triple est égale au produit d'intégrales simples :

$$Q = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) dx \times \int_{-b/2}^{b/2} \cos\left( \frac{\pi y}{b} \right) dy \times \int_{-c/2}^{c/2} \frac{z^2}{c^2} dz = \rho_0 \left[ \frac{x^2}{a} - x \right]_{-a/2}^{a/2} \times \left[ \frac{b}{\pi} \sin\left( \frac{\pi y}{b} \right) \right]_{-b/2}^{b/2} \times \left[ \frac{z^3}{3c^2} \right]_{-c/2}^{c/2},$$

soit :

$$Q = \rho_0 \left[ \left( \frac{a^2}{4a} - \frac{a}{2} \right) - \left( \frac{a^2}{4a} + \frac{a}{2} \right) \right] \times \frac{b}{\pi} \left[ \sin\left( \frac{\pi}{2} \right) - \sin\left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] \times \frac{1}{3} \left[ \frac{c^3}{8c^2} - \frac{-c^3}{8c^2} \right] = \rho_0 \times (-a) \times \frac{2b}{\pi} \times \frac{c}{12},$$

d'où :

$$Q = -\rho_0 \frac{abc}{6\pi}.$$



On a :  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  et  $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a}$ .

## Exercices de niveau 2

### Exercice 4



1) L'analogie entre la charge électrique et la masse permet de traiter ce problème gravitationnel comme un problème d'électrostatique.

La distribution de masse possède une géométrie « sphérique » : le système de coordonnées le mieux adapté est donc le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Lorsqu'un point  $M$  décrit le

volume  $V$  de la Terre, la distance au centre  $C$  (origine du repère des coordonnées sphériques) varie de 0 à  $R$ , tandis que les angles  $\theta$  et  $\phi$  varient respectivement de 0 à  $\pi$  et de 0 à  $2\pi$ . L'élément de volume contient la masse élémentaire :

$$dm = \rho dV = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

La masse  $M$  totale est alors la somme des masses élémentaires :

$$M = \iiint dm = \iiint \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

L'intégrale triple est égale au produit d'intégrales simples :

$$M = \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{2R}\right) dr \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8R}\right]_0^R \times [-\cos\theta]_0^\pi \times [\phi]_0^{2\pi},$$

d'où :

$$M = \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{8}\right) \times 2 \times 2\pi = \frac{5}{6} \rho_0 \pi R^3.$$

 On a :  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  et  $\int \sin x dx = -\cos x$ .

2) Au centre de la Terre, la masse volumique vaut :

$$\rho(r=0) = \rho_0 = \frac{6M}{5\pi R^3}, \text{ soit : } \rho(r=0) = \frac{6 \times 6,0 \cdot 10^{24}}{5\pi \times (6,4 \cdot 10^6)^3} = 8,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

À la surface de la Terre, la masse volumique vaut :

$$\rho(r=R) = \frac{\rho_0}{2}, \text{ soit : } \rho(r=R) = \frac{8,7 \cdot 10^3}{2} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Malgré la grossièreté du modèle, ces valeurs sont **cohérentes avec la réalité** (la densité du fer est voisine de 8 et celle des roches granitiques de 4).

 La masse de  $1 \text{ m}^3$  d'eau étant égale à  $10^3 \text{ kg}$ , la masse volumique  $\rho$  d'un solide ou d'un liquide en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  est égale à  $10^3 d$ , où  $d$  est sa densité.

## Exercice 5

1)  Voir la méthode n° 1.

La force totale  $\vec{F}$  subie par la charge  $-q$  en  $M$  est la somme des forces exercées par la charge ponctuelle  $+q$  en  $A$  et la charge ponctuelle  $+q$  en  $B$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B, \text{ avec } \vec{F}_A = -kq^2 \frac{\vec{AM}}{AM^3} \text{ et } \vec{F}_B = -kq^2 \frac{\vec{BM}}{BM^3}.$$

On projette ces vecteurs sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BM} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}, \text{ d'où : } AM = BM = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

La force totale s'écrit donc :

$$\vec{F} = \frac{-kq^2}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \left[ \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right] = \frac{-kq^2}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2kq^2 x}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \vec{u}_x.$$

2) L'anneau est soumis uniquement à la force électrique  $\vec{F}$  portée par l'axe  $Ox$ . Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, l'équilibre a donc lieu lorsque  $\vec{F} = \vec{0}$ , c'est-à-dire lorsque  $x = 0$  : la position d'équilibre de l'anneau correspond donc au point  $O$ .

 On peut démontrer « physiquement » que la réaction de l'axe est nulle. En effet, le poids de l'anneau étant négligeable et la force  $\vec{F}$  étant portée par l'axe  $Ox$ , l'anneau n'exerce aucune action sur l'axe  $Ox$  ; d'après le principe des actions réciproques, l'anneau ne subit donc pas non plus d'action de la part de l'axe  $Ox$ . (La force  $\vec{F}$  suffit à « maintenir » l'anneau, avec ou sans l'axe.)

Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, on écarte l'anneau du point O : l'équilibre est stable si la force  $\vec{F}$  tend à faire revenir l'anneau à sa position d'équilibre O ; il est instable autrement. D'après l'expression de la force  $\vec{F}$  :

- si  $x > 0$ , alors  $-q^2x < 0$  et la force  $\vec{F}$  est orientée selon  $-\vec{u}_x$  :  
elle tend à faire revenir l'anneau vers O ;
- si  $x < 0$ , alors  $-q^2x > 0$  et la force  $\vec{F}$  est orientée selon  $+\vec{u}_x$  :  
elle tend à faire revenir l'anneau vers O.

La position d'équilibre O est donc une position d'équilibre stable.

3) D'après la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a pour l'anneau de masse  $m$  (assimilé à son centre d'inertie) :

$$m \vec{a} = \vec{F}, \text{ soit : } m \ddot{x} \vec{u}_x = \frac{-2kq^2x}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \vec{u}_x.$$

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe Ox, on obtient l'équation différentielle vérifiée par la grandeur  $x$  :

$$\ddot{x} + \frac{2kq^2}{m} \times \frac{x}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} = 0.$$

 C'est une équation différentielle non linéaire qu'il est impossible de résoudre en l'état.

4) Lorsqu'on lâche l'anneau, écarté au préalable de la distance  $d$ , il tend à revenir vers sa position d'équilibre O.

On a donc :

$$|x| < d \ll a, \text{ d'où : } \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} \approx \sqrt{a^2} = a.$$

 Physiquement, cette approximation signifie :  $AM = BM = \sqrt{x^2 + a^2} \approx a$ .

Avec cette approximation, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{2kq^2}{ma^3} x = 0.$$

Cette équation est l'équation linéaire d'un oscillateur harmonique. Elle admet alors pour solution la fonction :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

où  $\omega^2 = \frac{2kq^2}{ma^3}$  et A et B sont des constantes.

À l'instant  $t = 0$ , l'anneau est lâché sans vitesse après avoir été écarté de la distance  $d$ , d'où les valeurs des constantes A et B :

$$x(t = 0) = A = d \quad \text{et} \quad \dot{x}(t = 0) = B\omega = 0, \text{ soit : } A = d \text{ et } B = 0.$$

Le mouvement de l'anneau est donc rectiligne sinusoïdal d'équation :

$$x(t) = d \cos\left(\sqrt{\frac{2kq^2}{ma^3}} t\right).$$

 On caractérise un mouvement sinusoïdal par sa pulsation  $\omega$  ou sa période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

## Exercice 6

La boule de bureau, de masse  $m$  et de charge  $q$ , est soumise à trois forces :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , vertical et vers le bas ;

– la force de Coulomb exercée par la charge  $q$ , d'expression :

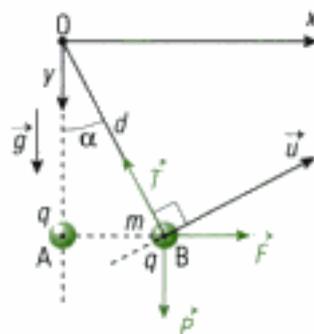
$$\vec{F} = kq^2 \frac{\vec{AB}}{AB^3};$$

– la tension  $\vec{T}$  du fil, dirigée selon le fil et orientée vers O.

Lorsque la boule est à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen, ces trois forces vérifient :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}.$$

Comme on cherche à déterminer seulement l'angle  $\alpha$ , on élimine la valeur  $T$  de la tension en projetant cette relation vectorielle sur l'axe  $(B, \vec{u})$  orthogonal au fil.



⚠ Si on projette la relation vectorielle sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ , on obtient un système de deux équations à deux inconnues : la valeur de la tension  $T = \|\vec{T}\|$  et l'angle  $\alpha$  fait par le fil avec la verticale. Comme le terme  $T$  est présent dans les deux équations, le calcul est plus long (car il faut effectuer une substitution pour éliminer  $T$ ), et donc le risque d'erreur est plus important.

La projection de chaque vecteur donne :

$$\vec{P} \cdot \vec{u} = -mg \sin \alpha, \quad \vec{T} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{F} \cdot \vec{u} = kq^2 \frac{AB \times \cos \alpha}{AB^3} = kq^2 \frac{\cos \alpha}{d^2 \sin^2 \alpha}.$$

💡 Dans le triangle  $OAB$  rectangle en  $A$ , on a :  $AB = d \sin \alpha$ , avec  $\alpha$  compris strictement entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$  (les autres valeurs n'ont pas de sens physique).

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$-mg \sin \alpha + \frac{kq^2}{d^2} \times \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0, \quad \text{soit} : \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{kq^2}{mgd^2} = K.$$

Étudions qualitativement les variations entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$  de la fonction continue  $f(\alpha) = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$  :

- si  $\alpha = 0$ , alors  $\sin \alpha = 0$ , donc  $f(0) = 0$  ;
- si  $\alpha$  croît de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \alpha$  augmente et  $\cos \alpha$  diminue, donc  $f(\alpha)$  augmente ;
- si  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \alpha \rightarrow 0$ , donc  $f(\alpha) \rightarrow \infty$ .

On en déduit que pour toute valeur positive de  $K$ , il existe une valeur de  $\alpha$  telle que  $f(\alpha) = K$  ; quelles que soient les données  $m$ ,  $q$  et  $d$  du problème, il **existe donc une position d'équilibre de la boule**.

## Exercices de niveau 3

### Exercice 7

1) Un point  $P$  quelconque du cerceau est complètement repéré par l'angle  $\alpha = (\vec{u}_\alpha, \vec{OP})$ . Une variation élémentaire  $d\alpha$  de l'angle  $\alpha$  correspond à l'élément de longueur  $Rd\alpha$  sur la circonférence. Celui-ci porte ainsi la charge :

$$dq = \lambda R d\alpha = \lambda_0 |\cos \alpha| R d\alpha.$$

💡 Implicitement, on a choisi le système de coordonnées cylindriques  $(r, \alpha, z)$ , où le centre  $O$  de l'anneau est le centre du repère. Pour un point  $P$  quelconque du cercle, on a :  $r = R$ ,  $\alpha$  compris entre  $0$  et  $2\pi$  et  $z = 0$ .

Comme la charge ponctuelle  $-q$  est placée en  $O$ , la charge totale est nulle si la charge du cerceau est égale à  $+q$ . On a donc :

$$q = \int dq = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} |\cos \alpha| d\alpha,$$

soit :

$$q = \lambda_0 R \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos \alpha) d\alpha \right) = \lambda_0 R \left( [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [\sin \alpha]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) = 4\lambda_0 R.$$

Il faut donc choisir  $\lambda_0 = \frac{q}{4R}$  pour que la charge totale soit nulle.



L'intégrale d'une fonction de période  $T$  sur un intervalle de longueur  $nT$  ( $n$  entier) est indépendante de la valeur de  $n$ . Ici, la fonction  $|\cos\alpha|$  a pour période  $\pi$ , donc :

$$\int_0^{2\pi} |\cos\alpha| d\alpha = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\alpha| d\alpha.$$

On peut alors partager « un tour » sur le cerceau en deux régions angulaires d'intervalle  $\pi$  où  $\cos\alpha$  garde un signe constant :

$$|\cos\alpha| = \cos\alpha \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } |\cos\alpha| = -\cos\alpha \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

2) • D'après le théorème de superposition, la force électrique totale exercée sur la charge ponctuelle  $Q$  placée en  $M$  est la somme de la force électrique  $\vec{F}_1$  exercée par le cerceau et de la force électrique  $\vec{F}_2$  exercée par la charge ponctuelle  $-q$  placée en  $O$  :

$$\vec{F}_2 = -kqQ \frac{\vec{OM}}{OM^3} = -kqQ \frac{z}{z^3} \vec{u}_z = \frac{-kqQ}{z^2} \vec{u}_z.$$



On a :  $OM^3 = z^3$  car  $z > 0$ . Si la cote du point  $M$  était négative, on aurait :  $OM^3 = |z|^3 = -z^3$ .

• Pour calculer la force  $\vec{F}_1$ , on « décompose » le cerceau en éléments de longueur considérés ponctuels. L'élément de longueur  $Rd\alpha$  centré sur le point  $P$  de la circonférence porte la charge élémentaire  $dq = \lambda R d\alpha$  et exerce sur la charge ponctuelle  $Q$  placée en  $M$  la force élémentaire :

$$d\vec{F} = kQdq \frac{\vec{PM}}{PM^3}, \text{ avec } \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = \begin{pmatrix} -R\cos\alpha \\ -R\sin\alpha \\ z \end{pmatrix} \text{ dans la base cartésienne.}$$



Il ne faut pas confondre le système de coordonnées cylindriques choisi pour repérer le point  $P$  sur le cerceau et le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  choisies pour exprimer le vecteur  $\vec{PM}$ . Dans ce repère, les points ont pour coordonnées :

$$O(0, 0, 0), M(0, 0, z), P(R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0).$$

La distance  $PM$  vaut :

$$PM = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha + z^2} = \sqrt{R^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}.$$

La force  $\vec{F}_1$  s'obtient en « sommant » sur le cerceau toutes les forces élémentaires  $d\vec{F}$  :

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} = \int kQdq \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{kQ\lambda_0 R}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\alpha| \begin{pmatrix} -R\cos\alpha \\ -R\sin\alpha \\ z \end{pmatrix} d\alpha \text{ avec } \lambda_0 R = \frac{q}{4}.$$



Pour calculer  $\vec{F}_1$ , on considère les actions de tous les éléments de longueur sur le cerceau, donc on intègre par rapport à l'angle  $\alpha$  entre 0 et  $2\pi$ , ou, ce qui est équivalent, entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

Chaque composante de  $\vec{F}_1$  dans la base cartésienne est obtenue par une intégrale.

– Calcul de la composante suivant l'axe  $Ox$  :

$$F_{1x} = \underbrace{\frac{-kQqR}{4(\sqrt{R^2 + z^2})^3}}_A \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\alpha| \cos\alpha d\alpha = A \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos^2\alpha) d\alpha \right).$$

Or, la fonction  $\cos^2\alpha$  a pour période  $\pi$ . On a donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha, \text{ d'où : } F_{1x} = 0.$$



On aurait pu calculer directement l'intégrale en utilisant l'identité :  $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ .

- Calcul de la composante suivant l'axe Oy :

$$F_{1y} = A \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\alpha| \sin\alpha \, d\alpha = A \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2\alpha}{2} \, d\alpha + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\frac{\sin 2\alpha}{2} \, d\alpha \right).$$

Or, la fonction  $\sin(2\alpha)$  a pour période  $\pi$ . On a donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2\alpha) \, d\alpha + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin(2\alpha) \, d\alpha, \text{ d'où : } F_{1y} = 0.$$



On a utilisé l'identité :  $\sin(2\alpha) = 2 \cos\alpha \sin\alpha$ .

- Calcul de la composante suivant l'axe Oz :

$$F_{1z} = \frac{kQqRz}{4(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_0^{2\pi} |\cos\alpha| \, d\alpha = \frac{kQqz}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}, \text{ car } \int_0^{2\pi} |\cos\alpha| \, d\alpha = 4 \text{ d'après la question 1.}$$

• La force électrique totale exercée sur la charge Q placée en M s'écrit donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = kqQ \left[ \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} - \frac{1}{z^2} \right] \vec{u}_z, \text{ où } z \text{ est la cote du point M.}$$

3) La force  $\vec{F}_1$  exercée par le cerceau sur la charge ponctuelle Q a pour expression :

$$\vec{F}_1 = kqQ \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

Si le cerceau était équivalent à une charge ponctuelle  $q$ , alors cette charge serait nécessairement placée sur l'axe Oz et la force de Coulomb s'écrirait :

$$\vec{F}_1 = k \frac{qQ}{d^2} \vec{u}_z, \text{ avec } d \text{ distance de la charge ponctuelle } q \text{ au point M.}$$

L'équivalence est donc possible en plaçant la charge  $q$  sur l'axe Oz à la distance  $d$  du point M de cote  $z$  telle que :

$$d^2 = \frac{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}{z}.$$



La distance  $d$  est différente de  $z + \text{constante}$ . La distribution de charges n'est donc pas équivalente *dans l'absolu* à une charge ponctuelle unique placée sur l'axe Oz (les charges du cerceau sont placées symétriquement par rapport à l'axe Oz).

4) Si on néglige  $R^2$  devant  $z^2$  dans l'expression de  $\vec{F}_1$ , alors on obtient  $\vec{F} = \vec{0}$  ! L'approximation doit donc être moins violente : on effectue pour cela un développement limité de la force  $\vec{F}_1$ .

$$\vec{F}_1 = kqQ \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z = \frac{kqQ}{z^2} \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-3/2} \vec{u}_z = \frac{kqQ}{z^2} \left( 1 - \frac{3R^2}{2z^2} \right) \vec{u}_z.$$



Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $(1+x)^n$  au voisinage de  $x=0$  s'écrit :  $(1+x)^n = 1 + nx$ .

La force totale exercée sur la charge Q placée en M s'écrit alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{kqQ}{z^2} \left( 1 - \frac{3R^2}{2z^2} \right) \vec{u}_z - \frac{kqQ}{z^2} \vec{u}_z = -\frac{3kqQR^2}{2z^4} \vec{u}_z.$$

La force  $\vec{F}$  étant inversement proportionnelle à  $z^4$ , la distribution globale de charges **n'est pas équivalente à une charge ponctuelle de valeur indépendante du point M**, car la force de Coulomb que celle-ci exercerait serait inversement proportionnelle au carré de la distance.

## Exercice 8

1) La masse  $m$  est soumise à cinq forces :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ , vertical et vers le bas ;

– les forces de Coulomb exercées par les charges ponctuelles  $q$  placées en A, B, C et D :

$$\vec{F}_A = kq^2 \frac{\vec{AM}}{AM^3}, \quad \vec{F}_B = kq^2 \frac{\vec{BM}}{BM^3}, \quad \vec{F}_C = kq^2 \frac{\vec{CM}}{CM^3}, \quad \vec{F}_D = kq^2 \frac{\vec{DM}}{DM^3}.$$

Dans la base du repère orthonormé  $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  on a :

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{BM} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{CM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{DM} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; \quad AM = BM = CM = DM = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

D'après le théorème de superposition, la force électrique totale s'écrit donc :

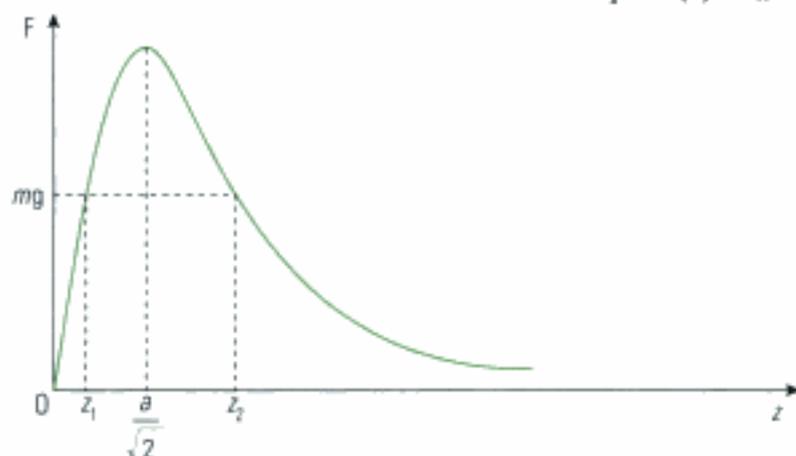
$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \frac{kq^2}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right] = \frac{4kq^2 z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

La masse  $m$  est à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen si les forces vérifient :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}, \text{ soit en projetant sur l'axe Oz : } \frac{4kq^2 z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} = mg.$$

⚠ En poursuivant le calcul, on obtiendrait une équation du troisième degré en  $z^2$  que l'on ne saurait pas résoudre simplement. Il vaut donc mieux utiliser une méthode graphique.

On trace la courbe donnant l'allure de la valeur de la force électrique  $F(z) = \|\vec{F}\|$  en fonction de  $z$ .



Cette fonction passe par un maximum. En ce point, la dérivée s'annule :

$$\frac{dF}{dz} = 4kq^2 \frac{(a^2 + z^2)^{3/2} - z \times \frac{3}{2} \times 2z(a^2 + z^2)^{1/2}}{(a^2 + z^2)^3},$$

d'où, en mettant  $(a^2 + z^2)^{1/2}$  en facteur :

$$\frac{dF}{dz} = 4kq^2 \frac{(a^2 + z^2)^{1/2}}{(a^2 + z^2)^3} (a^2 + z^2 - 3z^2) = 4kq^2 \frac{(a^2 + z^2)^{1/2}}{(a^2 + z^2)^3} (a^2 - 2z^2).$$

La dérivée s'annule donc si  $a^2 - 2z^2 = 0$ , c'est-à-dire pour :  $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Le maximum vaut alors :

$$F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4kq^2 \times \frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^3} = \frac{4kq^2 a}{\sqrt{2} \times \left(\sqrt{\frac{3}{2} a^2}\right)^3} = \frac{8kq^2}{\sqrt{27} a^2}.$$

Si la valeur  $mg$  du poids est supérieure à la valeur maximale de la force électrique, alors l'équilibre est impossible : la masse, trop lourde, tombe irrémédiablement. La masse  $m_0$  maximale est donc telle que :

$$F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8kq^2}{\sqrt{27} a^2} = m_0 g, \text{ soit : } m_0 = \frac{8kq^2}{\sqrt{27} a^2 g}.$$

2) D'après l'allure du graphe tracé à la question précédente, il existe deux positions d'équilibre correspondant aux cotes  $z_1$  et  $z_2$  telles que :

$$z_1 < \frac{a}{\sqrt{2}} < z_2.$$

• Pour  $z = z_1$ , si l'on écarte la masse  $m$  vers le haut ( $z$  augmente), alors la valeur de la force électrique augmente (car  $F(z)$  est croissante en  $z = z_1$ ). Comme le poids reste inchangé, la masse  $m$ , entraînée par la force électrique, s'élève et s'écarte davantage de sa position d'équilibre. Si l'on écarte maintenant la masse  $m$  vers le bas ( $z$  diminue), alors la valeur de la force électrique diminue (car  $F(z)$  est croissante en  $z = z_1$ ) ; la masse  $m$ , entraînée par son poids, descend donc et s'écarte davantage de sa position d'équilibre. **Cet équilibre est donc instable.**

• Pour  $z = z_2$ , si l'on écarte la masse  $m$  vers le haut ( $z$  augmente), alors la valeur de la force électrique diminue (car  $F(z)$  est décroissante en  $z = z_2$ ). Comme le poids reste inchangé, la masse  $m$ , entraînée par son poids, descend et revient vers sa position d'équilibre. Si l'on écarte maintenant la masse  $m$  vers le bas ( $z$  diminue), alors la valeur de la force électrique augmente (car  $F(z)$  est décroissante en  $z = z_2$ ) ; la masse  $m$ , entraînée par la force électrique, monte donc et revient vers sa position d'équilibre. **Cet équilibre est donc stable.**

3) D'après la deuxième loi de Newton appliquée dans le référentiel galiléen, on a pour la masse  $m$  ponctuelle :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}, \text{ soit en projetant sur l'axe } Oz : m\ddot{z} = -mg + \frac{4kq^2z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3}.$$



Les deux forces sont dirigées selon  $Oz$  et la masse est lâchée sans vitesse initiale : le mouvement n'a donc lieu que suivant cet axe.

On note  $z_e$  une position d'équilibre et on pose  $z = z_e + \delta z$ , où  $\delta z$  représente l'écartement de la masse  $m$  par rapport à sa position d'équilibre  $z_e$ . L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$m\delta\ddot{z} = \frac{4kq^2(z_e + \delta z)}{(\sqrt{a^2 + (z_e + \delta z)^2})^3} - mg.$$



Comme  $z = z_e + \delta z$  avec  $z_e = \text{cte}$ , on a bien :  $\dot{z} = \dot{\delta z}$ .



C'est une équation différentielle non linéaire qu'il est impossible de résoudre en l'état.

Pour  $\delta z \ll z_e$ , on « linéarise » cette équation différentielle en faisant un développement limité au premier ordre en  $\delta z$  du terme correspondant à la force électrique :

$$F = \frac{4kq^2(z_e + \delta z)}{(\sqrt{a^2 + (z_e + \delta z)^2})^3} = \frac{4kq^2(z_e + \delta z)}{(\sqrt{a^2 + z_e^2 + 2z_e\delta z + \delta z^2})^3}.$$

$$F = \frac{4kq^2z_e \left(1 + \frac{\delta z}{z_e}\right)}{(\sqrt{a^2 + z_e^2})^3} \left(1 + \frac{2z_e\delta z}{a^2 + z_e^2} + \frac{\delta z^2}{a^2 + z_e^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{4kq^2z_e \left(1 + \frac{\delta z}{z_e}\right)}{(\sqrt{a^2 + z_e^2})^3} \left(1 - \frac{3}{2} \times \frac{2z_e\delta z}{a^2 + z_e^2}\right).$$



Le terme en  $\delta z^2$  a été négligé car c'est un infiniment petit d'ordre 2.

$$F \approx \frac{4kq^2z_e}{(\sqrt{a^2 + z_e^2})^3} \left(1 + \frac{\delta z}{z_e}\right) \left(1 - \frac{3z_e\delta z}{a^2 + z_e^2}\right) \approx \frac{4kq^2}{(\sqrt{a^2 + z_e^2})^3} \left(z_e + \delta z \frac{a^2 - 2z_e^2}{a^2 + z_e^2}\right).$$

En remplaçant dans l'équation différentielle du mouvement, on en déduit donc :

$$m\delta\ddot{z} = \frac{4kq^2}{(\sqrt{a^2 + z_e^2})^3} \left(z_e + \delta z \frac{a^2 - 2z_e^2}{a^2 + z_e^2}\right) - mg,$$

d'où :

$$m \ddot{\delta z} = \underbrace{\frac{4kq^2 z_c}{(\sqrt{a^2 + z_c^2})^3} - mg + \frac{4kq^2(a^2 - 2z_c^2)}{(a^2 + z_c^2)^{5/2}}}_{0} \delta z, \text{ soit : } \ddot{\delta z} - \frac{4kq^2(a^2 - 2z_c^2)}{(a^2 + z_c^2)^{5/2}} \delta z = 0.$$



Dans le calcul, le terme nul traduit la condition d'équilibre en  $z_c$ .

• Lorsque  $z_c = z_1 < \frac{a}{\sqrt{2}}$ , l'équation est du type  $\ddot{\delta z} - \omega^2 \delta z = 0$  et sa solution s'écrit :

$$\delta z = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

À l'instant  $t = 0$ , la masse  $m$  est lâchée sans vitesse après avoir été écartée de la distance  $\Delta z$ . On en déduit :

$$\delta z(t=0) = \Delta z = A + B \quad \text{et} \quad \dot{\delta z}(t=0) = 0 = \omega(A - B), \text{ soit : } A = B = \frac{\Delta z}{2}.$$

L'écartement  $\delta z$  a donc pour expression juste après le lâcher :

$$\delta z = \frac{\Delta z}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \Delta z \operatorname{ch}(\omega t), \text{ avec } \omega^2 = \frac{4kq^2(a^2 - 2z_c^2)}{(a^2 - 2z_c^2)^{5/2}} > 0.$$

Cette fonction diverge car elle contient une exponentielle croissante : on retrouve bien que la position d'équilibre  $z_1$  est instable.

• Lorsque  $z_c = z_2 > \frac{a}{\sqrt{2}}$ , l'équation est du type  $\ddot{\delta z} + \omega^2 \delta z = 0$  et sa solution s'écrit :

$$\delta z = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

À l'instant  $t = 0$ , la masse  $m$  est lâchée sans vitesse après avoir été écartée de la distance  $\Delta z$ . On en déduit :

$$\delta z(t=0) = \Delta z = A \quad \text{et} \quad \dot{\delta z}(t=0) = 0 = \omega B, \text{ soit : } A = \Delta z \text{ et } B = 0.$$

L'écartement  $\delta z$  a donc pour expression :

$$\delta z = \Delta z \cos(\omega t), \text{ avec } \omega^2 = \frac{4kq^2(2z_c^2 - a^2)}{(a^2 + z_c^2)^{5/2}} > 0.$$

La masse  $m$  oscille autour de la position d'équilibre  $z_2$  sans jamais s'en éloigner : on retrouve bien que la position d'équilibre  $z_2$  est stable.



# Le champ électrostatique

## Introduction

La loi de Coulomb met en évidence l'existence du champ électrique. On parlera de champ électrostatique car on suppose qu'aucune variation n'a lieu dans le temps. Ce chapitre donne la définition du champ électrostatique à partir de cette loi : l'expression du champ électrostatique créé par une distribution de charges est établie.

Les propriétés de symétrie et d'invariance sont étudiées et, lorsqu'elles sont suffisantes, le théorème de Gauss permet d'obtenir plus facilement l'expression du champ électrostatique. Une alternative est ainsi donnée à l'étudiant qui doit calculer un champ électrostatique, ainsi qu'un critère de choix entre les méthodes à disposition.

### Plan du chapitre 2

#### A. Champ électrostatique créé par des charges

- |  |    |
|--|----|
| 1. Définition du champ électrostatique. . . . .                    | 34 |
| 2. Champ créé par une charge ponctuelle . . . . .                  | 34 |
| 3. Champ créé par plusieurs charges ponctuelles . . . . .          | 34 |
| 4. Champ créé par une distribution linéique de charges . . . . .   | 35 |
| 5. Champ créé par une distribution surfacique de charges . . . . . | 35 |
| 6. Champ créé par une distribution volumique de charges . . . . .  | 35 |

#### B. Existence et continuité du champ $\vec{E}$

- |   |    |
|---|----|
| 1. Cas de charges ponctuelles . . . . .                   | 36 |
| 2. Cas d'une distribution linéique de charges . . . . .   | 36 |
| 3. Cas d'une distribution surfacique de charges . . . . . | 37 |
| 4. Cas d'une distribution volumique de charges . . . . .  | 37 |

#### C. Considérations de symétrie et d'invariance

- |  |    |
|--|----|
| 1. Vrais vecteurs, pseudo-vecteurs . . . . . | 39 |
| 2. Considérations de symétrie . . . . .      | 41 |
| 3. Considérations d'invariance . . . . .     | 41 |

#### D. Théorème de Gauss

- |  |    |
|--|----|
| 1. Flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface . . . . . | 42 |
| 2. Théorème de Gauss . . . . .                             | 43 |

#### Méthodes

- |                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| L'essentiel ; mise en œuvre. . . . . | 45 |
|--------------------------------------|----|

*Énoncés des exercices* . . . . . 50

*Indications* . . . . . 52

*Solutions des exercices* . . . . . 53

# A. Champ électrostatique créé par des charges

## A.1. Définition du champ électrostatique

### Definition 1

Si une particule ponctuelle de charge  $q$ , immobile en un point  $M$  de l'espace, est soumise à une force  $\vec{F}$  autre que son poids et nulle si  $q$  est nulle, alors il existe un champ électrostatique  $\vec{E}$  au point  $M$  tel que :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$\vec{F}$  force en newton (N)  
 $q$  charge en coulomb (C)  
 $\vec{E}$  champ en  $N \cdot C^{-1}$  ou  $V \cdot m^{-1}$

Le champ électrostatique est mesuré en newtons par coulombs ( $N \cdot C^{-1}$ ), mais l'unité couramment employée est le volt par mètre<sup>1</sup>, notée  $V \cdot m^{-1}$ .

La définition du champ électrostatique<sup>2</sup> découle donc de la force de Coulomb.

## A.2. Champ créé par une charge ponctuelle

Cette expression découle directement de la force de Coulomb, donc de la définition du champ. Une charge ponctuelle  $q'$  placée en  $M$  subit de la part d'une charge ponctuelle  $q$  placée en  $P$  la force de Coulomb :

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{PM} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = q' \vec{E}$$

### Definition 2

La charge ponctuelle  $q$  placée en  $P$  crée sur un point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $P$  le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

$\vec{E}$  champ en  $V \cdot m^{-1}$   
 $q$  charge en coulomb (C)  
 $\epsilon_0$  permittivité du vide (SI)  
 $r$  distance en m

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de  $P$  vers  $M$ .

On remarque que le champ électrostatique créé par une charge positive et celui créé par une charge négative ont des sens opposés (fig.1).

## A.3. Champ créé par plusieurs charges ponctuelles

Soit  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  placées respectivement aux points  $P_i$ .

D'après le théorème de superposition, les champs électriques créés au point  $M$  par les  $N$  charges s'ajoutent.

### Definition 3

Le champ  $\vec{E}$  créé en  $M$  par  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

où  $\vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\vec{P_i M}}{P_i M}$  est le vecteur unitaire de la droite ( $P_i M$ ) dirigé de  $P_i$  vers  $M$ .

1. On verra dans le chapitre 3 que la circulation du champ électrostatique est homogène à ce champ multiplié par une longueur, et est égale à une différence de potentiel (mesurée en volts).

2. On parle aussi de champ électrique, mais le mot « électrostatique » précise que l'étude est effectuée en régime statique, c'est-à-dire que les grandeurs ne dépendent pas du temps.

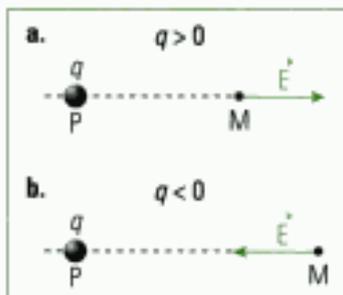


Fig. 1 - Champ créé par : a. une charge positive ; b. une charge négative.

## A.4. Champ créé par une distribution linéique de charges

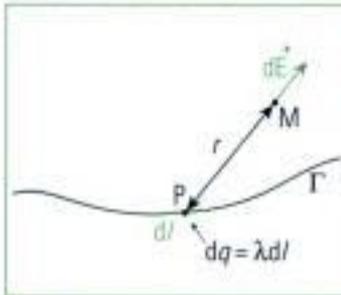


Fig. 2 - Distribution linéique de charges.

3. L'intégrale est comprise ici comme une addition d'un très grand nombre de champs infinitésimaux créés par des charges infiniment proches. On parle de sommation continue.

Les charges sont disposées sur une ligne  $\Gamma$  avec la densité linéique  $\lambda$ . Chaque élément  $dl$  de la ligne (fig. 2), de centre  $P$  et quasi-ponctuel, porte la charge  $dq = \lambda dl$  et crée le champ élémentaire  $d\vec{E}$  en  $M$ . Le champ total en  $M$  est la somme de tous les champs élémentaires créés par les éléments  $dl$  formant la ligne  $\Gamma$ .

### Définition 4

Le champ  $\vec{E}$  créé par une distribution linéique  $\lambda$  de charges s'écrit :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \int_{\Gamma} d\vec{E} = \int_{P \in \Gamma} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u},$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de  $P$  vers  $M$ .

## A.5. Champ créé par une distribution surfacique de charges

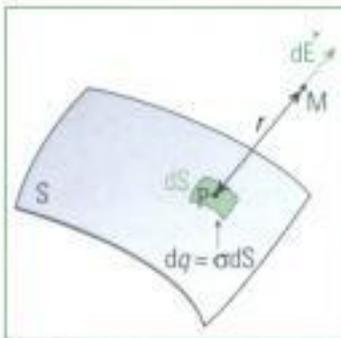


Fig. 3 - Distribution surfacique de charges.

Les charges sont disposées sur une surface  $S$  avec la densité surfacique  $\sigma$ . Chaque élément  $dS$  de la surface, de centre  $P$  et quasi-ponctuel, porte la charge  $dq = \sigma dS$  et crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$  en  $M$  (fig. 3). Le champ total en  $M$  est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les champs élémentaires créés par les éléments  $dS$  formant la surface  $S$ .

### Définition 5

Le champ  $\vec{E}$  créé par une distribution surfacique  $\sigma$  de charges s'écrit :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \iint_S d\vec{E} = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u},$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de  $P$  vers  $M$ .

## A.6. Champ créé par une distribution volumique de charges

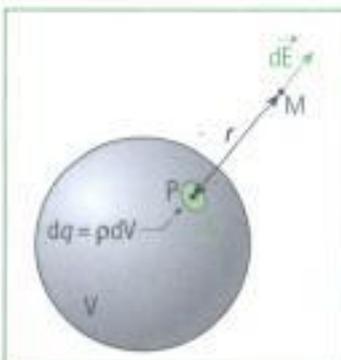


Fig. 4 - Distribution volumique de charges.

Les charges sont disposées dans un volume  $V$  avec la densité volumique  $\rho$ . Chaque élément  $dV$  du volume, de centre  $P$  et quasi-ponctuel, porte la charge  $dq = \rho dV$  crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$  en  $M$  (fig. 4). Le champ total en  $M$  est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous les champs élémentaires créés par les éléments  $dV$  formant le volume  $V$ .

### Définition 6

Le champ  $\vec{E}$  créé par une distribution volumique  $\rho$  de charges s'écrit :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \iiint_V d\vec{E} = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u},$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de  $P$  vers  $M$ .

## B. Existence et continuité du champ $\vec{E}$

On considère une distribution quelconque de charges. Une question se pose : cette distribution crée-t-elle un champ  $\vec{E}$  en tout point M de l'espace et, lorsque ce champ existe, est-il continu ?

S'il n'y a aucune charge en M, d'après le paragraphe A.1, ce champ existe et il est continu. En revanche, la réponse n'est pas évidente s'il y a une charge en M : il existe alors un point P de la distribution de charges tel que la distance PM est nulle et une étude mathématique s'impose.

Dans la suite, on s'efforcera de distinguer les arguments « purement mathématiques » des arguments « physiques ».

### B.1. Cas de charges ponctuelles

D'après le paragraphe A.3., le champ en M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i.$$

Lorsque le point M et le point  $M_i$  sont confondus,  $r_i \rightarrow 0$  et le champ diverge : le champ n'est donc pas défini.

#### Propriété 1

Soit une collection de charges ponctuelles. Le champ  $\vec{E}$  créé par cette collection est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.

La notion de charges ponctuelles n'a de sens que si l'observateur se place à une échelle de grandeur très supérieure à la dimension de la charge : celle-ci apparaît alors comme ponctuelle.

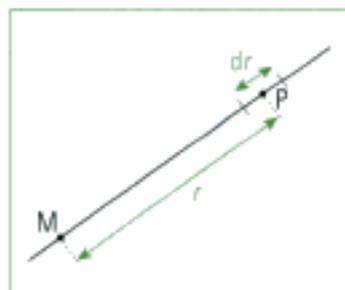


Fig. 5 - Modélisation de la distribution linéique de charges.

### B.2. Cas d'une distribution linéique de charges

Soit une distribution linéique de charges et un point M appartenant à cette distribution. On considère le champ créé en M par les charges placées en ce point (les autres charges ne posent aucun problème pour la définition du champ). Le point M se trouve donc à la distance  $r$  de l'élément de longueur  $dl$  centré sur le point P tel que  $PM = r$  (fig. 5). En assimilant  $dl$  à  $dr$ , la valeur du champ élémentaire  $d\vec{E}$  créé en M par les charges placées P varie comme :

$$\frac{dl}{r^2} \approx \frac{dr}{r^2}.$$

Pour avoir le champ créé en M par les charges placées en ce point<sup>4</sup>, on fait tendre  $r$  vers zéro, ce qui revient physiquement à amener P en M. On voit alors que le champ devient infini lorsque  $r$  s'annule.

#### Propriété 2

Soit une distribution linéique de charges. Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace, sauf en les points de la distribution.

La notion de charges linéiques n'a de sens que si « l'épaisseur » de la distribution est très petite devant l'échelle de grandeur de l'observateur. Si c'est le cas, on ne cherche pas à calculer le champ en ces points de la distribution.

4. Elles occupent une portion de ligne de longueur  $dr$  infinitésimale, mais donnée.

5. On rappelle que les coordonnées polaires ( $r$  et  $\theta$ ) sont les deux coordonnées cylindriques définies dans le plan ( $Ox, Oy$ ).

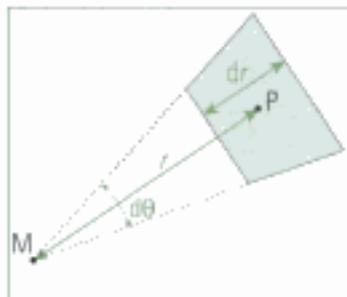


Fig. 6 - Modélisation de la distribution surfacique de charges.

6. En fait, pour nombre de situations similaires à celles décrites dans la Méthode 2, des considérations de symétrie nous conduiront à considérer le champ électrostatique nul sur les charges, et non infini comme ici. La discussion menée dans les méthodes prouve que cette considération n'est qu'apparente.

### B.3. Cas d'une distribution surfacique de charges

Soit une distribution surfacique de charges et un point  $M$  appartenant à cette distribution. On considère le champ créé en  $M$  par les charges placées en ce point (les autres charges ne posant aucun problème). Le point  $M$  se trouve donc à la distance  $r$  de l'élément de surface  $dS$  centré sur le point  $P$  tel que  $dS = r dr d\theta$  (fig. 6) — en utilisant les coordonnées polaires<sup>5</sup> et en prenant pour origine le point  $M$ , la surface  $dS$  est une partie de couronne circulaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$ .

La valeur du champ élémentaire  $d\vec{E}$  créé en  $M$  par les charges placées en  $P$  varie comme :

$$\frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi r dr}{r^2} = 2\pi \frac{dr}{r}.$$

Pour avoir le champ créé en  $M$  par les charges qui s'y trouvent, on amène  $P$  en  $M$  ; il faut ensuite faire tendre  $r$  vers zéro, alors le champ devient infini lorsque  $r$  s'annule<sup>6</sup>.

#### Propriété 3

Soit une distribution surfacique de charges. Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace, sauf en les points de la distribution ; il est donc discontinu à la traversée de la surface.

La notion de densité surfacique n'a de sens que si l'épaisseur de la densité est infime devant l'échelle d'observation. Dans ce cas, on ne cherche pas à calculer le champ pour les points de la distribution surfacique.

### B.4. Cas d'une distribution volumique de charges

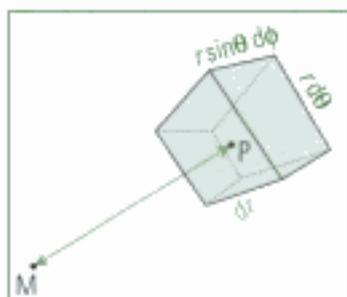


Fig. 7 - Modélisation de la distribution volumique de charges.

Soit une distribution volumique de charges et un point  $M$  appartenant à cette distribution. On considère le champ créé en  $M$  par les charges placées en ce point (les autres charges ne posant aucun problème). Le point  $M$  se trouve donc à la distance  $r$  de l'élément de volume  $dV$  centré sur le point  $P$  tel que  $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$  (fig. 7) — en utilisant les coordonnées sphériques et en prenant pour origine le point  $M$ , le volume  $dV$  est une partie de couronne sphérique d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$  centrée sur  $M$  (avec  $PM = r$ ).

La valeur du champ élémentaire  $d\vec{E}$  créé en  $M$  par les charges placées sur cette couronne varie comme :

$$\frac{dV}{r^2} = \frac{4\pi r^2 dr}{r^2} = 4\pi dr.$$

Pour avoir le champ créé en  $M$  par les charges qui s'y trouvent, on fait tendre  $r$  vers zéro ( $M$  et  $P$  deviennent confondus). On voit alors que ce champ ne diverge pas lorsque  $r$  s'annule : tout se passe comme si aucune charge n'était alors présente en  $M$  car  $dr$  est infinitésimal.

#### Propriété 4

Soit une distribution volumique de charges. Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace.

### Application 1 Expression d'un champ $\vec{E}$ en un point M

Calculer par intégration le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en un point M quelconque de l'espace par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  uniforme et répartie le long de l'axe  $(z')$ .

#### Solution

Le champ électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur l'axe  $(z')$ . Soit un point M quelconque n'appartenant pas à cet axe. On définit l'origine O de l'axe  $(z')$  par le projeté orthogonal de M sur cet axe (fig.8). On choisit le système de coordonnées cylindriques d'axe  $(z')$ .

L'élément de longueur  $dl = dz$ , centré sur un point P de l'axe, porte la charge élémentaire  $dq = \lambda dz$ . Le champ élémentaire  $d\vec{E}$  créé en M par cette charge élémentaire s'écrit :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

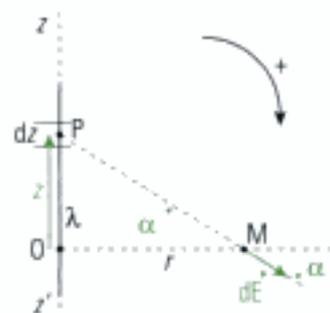


Fig. 8 - Champ créé en M par une distribution linéique centrée en P.

Le champ total est la somme vectorielle des champs élémentaires créés par tous les points P de l'axe. Dans la base cylindrique, on a :

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z, \text{ avec } PM = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Les composantes du champ total s'écrivent alors :

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} dz ; \quad E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} dz.$$

Les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$  de la base cylindrique restent inchangés lorsque le point P décrit l'axe  $(z')$ .

Calculer des intégrales avec des bornes infinies (intégrales indéfinies) étant compliqué, on change donc de variable en prenant l'angle  $\alpha$  tel que  $\tan\alpha = \frac{z}{r}$ . On a alors :

$$d(\tan\alpha) = (1 + \tan^2\alpha)d\alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dz}{r}, \text{ car } r \text{ reste constant.}$$

Lorsque  $z \rightarrow -\infty$ , alors  $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  ; lorsque  $z \rightarrow +\infty$ , alors  $\alpha \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ .

Les composantes du champ peuvent être calculées, en posant :

$$z = r \tan\alpha ; \quad dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} ; \quad \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

$$E_z = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{-r \tan\alpha}{\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^3} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [-\cos\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 0.$$

$$E_r = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^3} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

L'expression finale du champ  $\vec{E}$  en M est :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

## C. Considérations de symétrie et d'invariance

Un champ électrique est créé par des charges électriques réparties dans l'espace. On cherche des méthodes simples permettant de connaître *a priori* la direction du champ en un point M quelconque.

On étudie ainsi l'effet des isométries<sup>7</sup> de l'espace sur la direction du champ électrique.

7. En géométrie, une isométrie est une transformation qui conserve les distances. Il en existe trois : les symétries planes, les rotations autour d'un axe, et les translations.

### C.1. Vrais vecteurs, pseudo-vecteurs

Pour écrire les vecteurs, il est nécessaire de les exprimer dans la base (généralement orthonormée) d'un repère. Conventionnellement, on choisit une base « directe » où les vecteurs de la base sont donnés par les trois doigts de la main droite : le troisième vecteur est le produit vectoriel des deux premiers et son sens définit le caractère « direct » de la base (fig. 9). On dit alors que l'espace est orienté dans le sens direct.

Si l'ordre des trois vecteurs est celui des trois doigts de la main gauche, alors la base est « indirecte », ce qui revient à inverser le sens du troisième vecteur (fig. 9). On dit alors que l'espace est orienté dans le sens indirect.

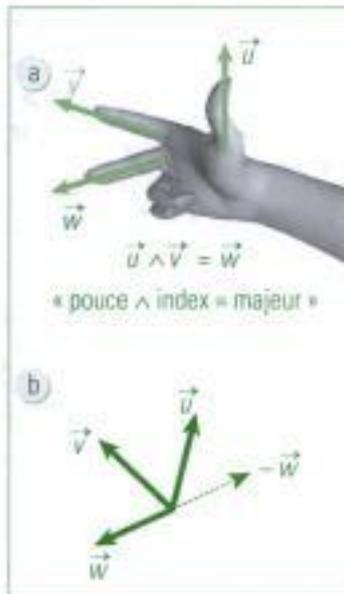


Fig. 9 - a. base directe :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$   
b. base indirecte.

#### Définition 7

Un vecteur est un vrai vecteur (ou vecteur polaire) si son sens ne dépend pas de l'orientation de l'espace.

Un vecteur est un pseudo-vecteur (ou vecteur axial) si son sens dépend de l'orientation de l'espace.

Exemples :

- Les vecteurs position, vitesse, accélération, force, ... sont de vrais vecteurs (le repère utilisé pour décrire le mouvement d'un solide n'a pas d'influence sur sa vitesse réelle).
- Les vecteurs champ magnétique, rotation instantanée, moment d'une force, moment cinétique, sont des pseudo-vecteurs.

De manière générale, tout produit vectoriel de deux vrais vecteurs est un pseudo-vecteur, alors que le produit vectoriel d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un vrai vecteur.

#### Propriété 5

Le vecteur champ électrostatique, proportionnel à la force qui le définit, est un vrai vecteur.

### C.2. Considérations de symétrie

#### C.2.1 – Plans de symétrie

Une symétrie plane change l'orientation de l'espace :

une base directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  devient, par symétrie plane par rapport au plan  $\pi$ , une base indirecte  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, -\vec{e}_z)$  (fig.10).

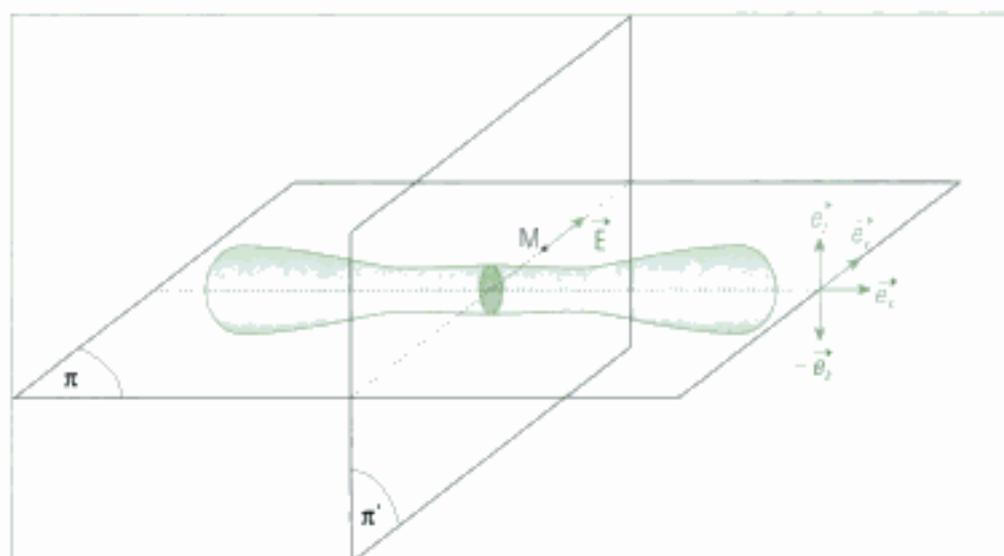


Fig. 10 - Distribution de charges ayant deux plans de symétrie.

8. Cela ne signifie pas que la distribution est transformée par cette symétrie en elle-même, mais que chaque point de la distribution a pour image un autre point de la distribution dont la charge est identique.

9. Ne pas oublier que le point M où l'on cherche le champ doit faire partie des plans de symétrie.

Considérons une distribution de charges et un point M de l'espace où le champ  $\vec{E}$  est défini. Supposons qu'il existe un plan  $\pi$  contenant le point M, tel que la symétrie par rapport à ce plan laisse la distribution de charges globalement inchangée\*. Le point M, inchangé, « voit » la même distribution de charges qu'avant la symétrie (fig. 10) : le champ  $\vec{E}$  en M reste donc inchangé. On en déduit que  $\vec{E}$  est inclus dans le plan  $\pi$ , car seuls les vecteurs du plan de symétrie sont invariants par symétrie par rapport à ce plan.

De même, s'il existe un second plan de symétrie  $\pi'$  contenant le point M, alors le champ  $\vec{E}$  appartient au plan  $\pi'$ .

#### Propriété 6

Si la distribution de charges\* admet deux plans de symétrie  $\pi$  et  $\pi'$  contenant le point M, alors la direction du champ  $\vec{E}$  en M est celle de la droite d'intersection des plans  $\pi$  et  $\pi'$ .

Si le point M n'appartient pas au plan de symétrie  $\pi$ , alors on ne dispose d'aucune information sur la direction du champ. En effet, on peut juste conclure qu'en  $M'$ , image de M par la symétrie, le champ est symétrique du champ  $\vec{E}$  en M. Ce type d'argumentation permet de déterminer la parité du champ électrostatique, une fois que l'on en connaît la direction.

### 3.2.2 - Plan d'antisymétrie

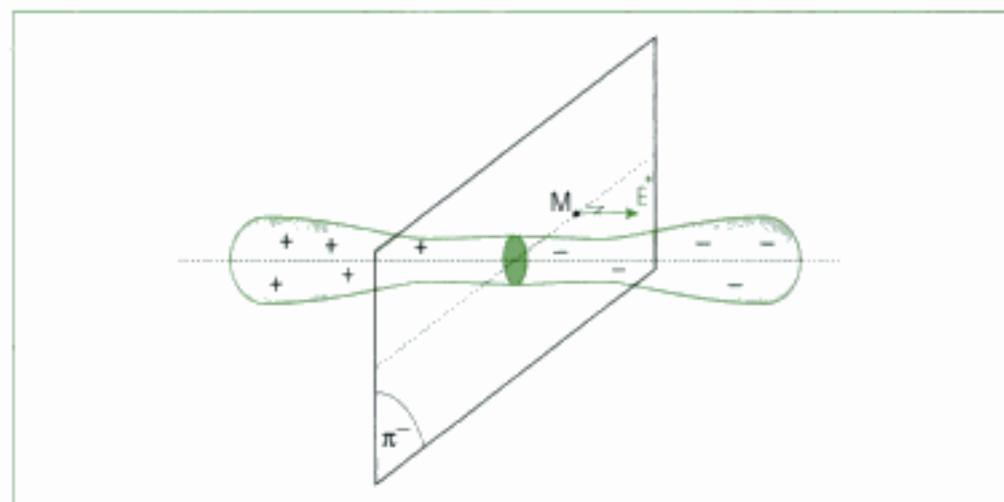


Fig. 11 - Distribution de charges ayant un plan d'antisymétrie.

10. Cela signifie qu'une charge positive est transformée en une charge négative et vice versa. La distribution doit donc contenir des charges des deux signes, ce qui est rare.

11. Que le point M reste inchangé ou non par cette rotation n'a pas d'importance, on raisonne uniquement sur l'invariance de la distribution de charges.

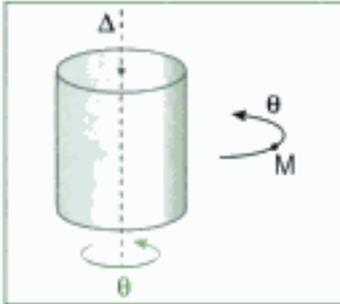


Fig. 12 - Distribution cylindrique de charge et rotation.

12. Le mouvement étant relatif, on peut aussi dire que la rotation du point M (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de charges qu'il « voit ». La valeur du champ en M ne peut donc pas dépendre de l'angle qui définit cette rotation.

13. Que le point M reste inchangé ou non par cette translation n'a pas d'importance, on raisonne uniquement sur l'invariance de la distribution de charges.

14. On peut aussi dire que la translation de M (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de charges qu'il « voit ». La valeur du champ en M ne peut donc pas dépendre de la coordonnée qui définit cette translation.

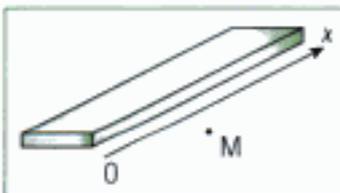


Fig. 13 - Distribution illimitée et translation.

15. Ce modèle traduit physiquement le fait que la distance du point M aux charges est suffisamment petite devant la dimension de la distribution : pour un observateur placé en M, la distribution paraît alors d'extension infinie.

Considérons une distribution de charges et un point M de l'espace où le champ  $\vec{E}$  est défini. Supposons qu'il existe un plan  $\pi^-$  contenant M telle que la symétrie par rapport à ce plan transforme la distribution de charges en une distribution exactement opposée<sup>10</sup>.

Le point M, inchangé, « voit » une distribution de charges opposée à celle qu'il « voyait » (fig. 11) : le champ  $\vec{E}'$  en M change donc de sens ( $\vec{E}' = -\vec{E}$ ). On en déduit que la direction du champ est orthogonale au plan  $\pi^-$ , car seuls les vecteurs orthogonaux au plan de symétrie sont changés en leurs opposés par symétrie par rapport à ce plan.

#### Propriété 7

Si distribution de charges admet un plan d'antisymétrie  $\pi^-$  contenant M, la direction du champ  $\vec{E}$  en M est celle de la droite orthogonale au plan  $\pi^-$ .

## C.3. Considérations d'invariance

### C.3.1 – Rotations autour d'un axe

Considérons une distribution de charges et un point M de l'espace où le champ  $\vec{E}$  est défini. S'il existe un axe  $\Delta$  tel qu'une rotation d'angle  $\theta$  quelconque autour de  $\Delta$  laisse la distribution de charges inchangée<sup>11</sup>, alors la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ  $\vec{E}$  en M ne dépend pas de l'angle  $\theta$  (il ne dépend pas de la coordonnée d'espace correspondant à l'angle  $\theta$  de la rotation).

Sur la figure 12, la distribution de charges est cylindrique ; elle reste inchangée par toute rotation d'angle  $\theta$  quelconque autour de son axe de révolution  $\Delta$ . On en déduit que le module  $E$  du champ  $\vec{E}$  en M ne dépend pas de la coordonnée cylindrique  $\theta$  (il n'est pas nécessaire de connaître la direction du champ en M pour aboutir à cette conclusion : c'est donc la valeur du champ en M qui ne dépend pas de  $\theta$ ).

En effet, le point M fixe « voit » toujours la même distribution, alors que celle-ci a effectué une rotation<sup>12</sup>.

### C.3.2 – Translations selon une direction

S'il existe une droite  $\Delta$  telle que toute translation selon cette droite laisse la distribution de charges<sup>13</sup> inchangée, alors la valeur du champ  $E$  en M ne dépend pas de la coordonnée d'espace associée à cette translation.

En effet, un point M fixe « voit » la même distribution, alors que celle-ci a effectué une translation<sup>14</sup>.

Sur la figure 13, la distribution de charges est « infinie » dans la direction de  $(Ox)$  ; elle reste donc inchangée par toute translation selon cette direction. On en déduit que le module du champ  $E$  en M ne dépend pas de  $x$  (il n'est pas nécessaire de connaître la direction du champ en M pour aboutir à cette conclusion ; c'est donc la valeur du champ qui ne dépend pas de  $x$ ).

Il ne peut y avoir invariance par translation que si la distribution de charges est illimitée dans la direction de la translation<sup>15</sup> c'est-à-dire s'il y a des charges « à l'infini ».

#### Propriété 8

Si une distribution de charges est inchangée par une translation ou une rotation, alors la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ  $\vec{E}$  créé en tout point M ne dépend pas de la coordonnée correspondante.

### Application 2 Direction et paramètres d'un champ $\vec{E}$

Déterminer la direction et les variables d'espace dont dépend le champ  $\vec{E}$  créé en un point quelconque M par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  constante et répartie le long d'un fil rectiligne de longueur infinie (fig.14).

#### Solution

La forme de la distribution de charges incite à choisir le système de coordonnées cylindriques pour décrire le champ. Vérifions cela en effectuant les considérations de symétrie et d'invariances.

- Soit H le projeté orthogonal de M sur le fil. Les plans  $\pi_1$  (défini par la droite (HM) et le fil) et  $\pi_2$  (perpendiculaire au fil et passant par M) sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. La direction du champ en M est donc la droite (HM), intersection de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Le champ est donc colinéaire au vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  (fig. 15) des coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Dans ce système de coordonnées, on a :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r.$$

- En outre, toute translation selon la direction du fil, ainsi que toute rotation autour de cet axe, laissent inchangée la distribution de charges : le champ  $\vec{E}$  en M ne dépend donc ni de la coordonnée  $z$  associée à cette translation, ni de la coordonnée  $\theta$  associée à cette rotation.

- On a donc finalement :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

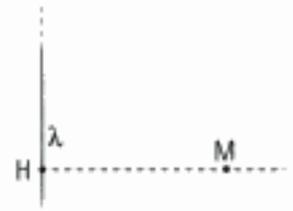


Fig. 14 - Cas d'une distribution linéique.

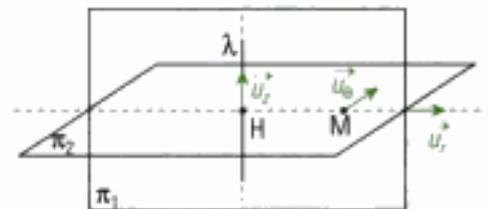


Fig. 15 -  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des plans de symétrie.

## D. Théorème de Gauss

16. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), physicien et mathématicien allemand, a apporté des avancées décisives en astronomie, électromagnétisme et optique. Le théorème qui porte son nom unifie la théorie des champs attracteurs et répulsifs. Gauss est considéré comme l'un des plus grands scientifiques de l'histoire, en ayant rapproché le calcul mathématique des applications physiques.

17. Le calcul du champ créé par une distribution continue de charges donne obligatoirement lieu à un calcul intégral, si l'on se ramène à la définition.

Le théorème de Gauss<sup>16</sup> permet d'obtenir l'expression du champ  $\vec{E}$  électrique sans calculer d'intégrale<sup>17</sup>, à condition que les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charges soient suffisamment puissantes.

### D.1. Flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface

On suppose que le champ  $\vec{E}$ , créé par une distribution quelconque de charges, existe en tout point de la région de l'espace où l'étude est effectuée.

#### D.1.1 - Flux élémentaire $d\phi$

Considérons un élément de surface  $dS$  infinitésimal (fig. 16) ; ses dimensions sont suffisamment petites pour le considérer comme plan. Le champ  $\vec{E}$  peut être considéré comme uniforme sur la très faible étendue de l'élément de surface  $dS$ . Le « vecteur surface » est  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface  $dS$ .

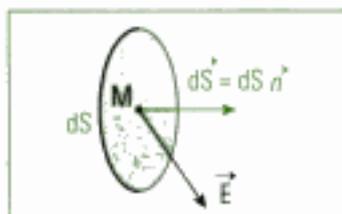


Fig. 16 - Élément de surface  $dS$ .

#### Définition 8

Le flux élémentaire  $d\phi$  du champ  $\vec{E}$  à travers l'élément de surface  $dS$  est :

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$\phi$  flux en  $V \cdot m$   
 $\vec{E}$  champ en  $V \cdot m^{-1}$   
 $S$  surface en  $m^2$

Le signe de  $d\phi$  dépend du sens choisi pour le vecteur unitaire  $\vec{n}$ .

### D.1.2 - Flux $\phi$ à travers une surface S

Considérons une surface S de grande dimension. Il est toujours possible de décomposer cette surface en un « pavage » extrêmement fin d'éléments de surface  $dS$ , pour lesquels on sait calculer le flux du champ  $\vec{E}$ .

#### Propriété 9

Le flux total  $\phi$  du champ  $\vec{E}$  à travers la surface S est la somme<sup>18</sup> de tous les flux élémentaires  $d\phi$  à travers chaque élément de surface  $dS$  qui constituent S :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

18. L'intégration représente « physiquement » la sommation d'une infinité d'éléments infinitésimaux.

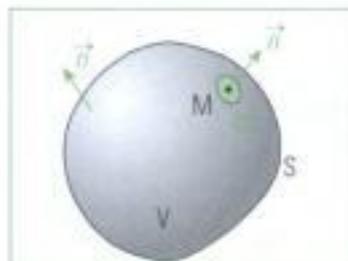


Fig. 17 - Surface fermée.



Fig. 18 - Surface ouverte.

19. On n'effectue pas l'étude en des endroits où le champ  $\vec{E}$  n'est pas défini.

20. La démonstration de ce théorème n'est plus au programme, car elle fait appel à des notions d'angle solide (angle en trois dimensions).

21. Ce théorème est un outil de calcul extrêmement efficace pour calculer le champ  $\vec{E}$  dans des situations « de haute symétrie ».

Tous les vecteurs unitaires  $\vec{n}$  orientant les normales aux éléments de surface doivent être orientés dans un sens « analogue ». Ce sens est choisi en fonction de la nature de la surface S.

• On dit qu'une surface est fermée lorsqu'elle délimite un volume. Les normales sont alors conventionnellement orientées « sortantes » en tout point de la surface fermée S (fig. 17).

On n'a donc pas de choix pour orienter lorsqu'il s'agit d'une surface fermée.

• On dit qu'une surface est ouverte (fig. 18) s'il existe une ligne fermée  $\Gamma$  (ou contour) sur lequel elle s'appuie. On peut toujours choisir un sens « + » pour orienter le contour  $\Gamma$ , c'est-à-dire pour suivre un parcours le long de  $\Gamma$ .

Le sens de la normale  $\vec{n}$  en tout point de la surface S est lié au sens positif choisi pour orienter le contour. La règle « du tire-bouchon » donne alors le sens de  $\vec{n}$  : on tourne le tire-bouchon dans le sens positif d'orientation de  $\Gamma$  et le sens de  $\vec{n}$  est donné par celui de translation du tire-bouchon.

### D.2. Théorème de Gauss

Considérons une distribution quelconque de charges dans le vide. Elle crée un champ  $\vec{E}$  continu en tout point de la région de l'espace où l'étude est effectuée<sup>19</sup>.

#### Théorème 1

##### Théorème de Gauss<sup>20</sup>

Le flux  $\phi$  du champ  $\vec{E}$  à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge  $q_{int}$  contenue dans le volume V délimité par la surface S :

$$\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$\phi$  flux en  $V \cdot m$   
 $q_{int}$  charge en coulomb (C)  
 $\epsilon_0$  permittivité absolue du vide (SI)

Ce théorème indique que les charges extérieures à la surface fermée S créent un flux nul à travers cette surface<sup>21</sup>.

### Application 3 Détermination d'un champ $\vec{E}$

Établir l'expression du champ  $\vec{E}$  créé en un point quelconque M de l'espace par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  uniforme répartie le long d'un fil rectiligne infini (fig. 19).

#### Solution

D'après les considérations de symétrie et d'invariance, on sait que dans le système de coordonnées cylindriques (voir Application 2) :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

Le théorème de Gauss permet d'obtenir  $E(r)$  sans effectuer le calcul « direct » du champ (voir Application 1).

Choisissons une surface cylindrique  $\Sigma_3$  à base circulaire de rayon  $r$ , centrée sur l'axe ( $zz'$ ) et passant par M. On ferme cette surface au moyen de deux bases (disques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ ) distantes d'une longueur  $h$  le long de l'axe ( $zz'$ ).

On applique alors le théorème de Gauss à la surface fermée  $\Sigma$  constituée par l'assemblage des trois surfaces ouvertes  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  (fig. 20).

- Le flux du champ  $\vec{E}$  à travers les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  est nul car  $\vec{E}$  et  $\vec{n}_1$  (ou  $\vec{n}_2$ ) sont orthogonaux en tout point de  $\Sigma_1$  (ou  $\Sigma_2$ ) :

$$\phi_1 = \iint_{\Sigma_1} d\phi = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS = 0 \quad ; \quad \phi_2 = \iint_{\Sigma_2} d\phi = \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS = 0.$$

- Pour la surface latérale  $\Sigma_3$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{n}_3$  sont colinéaires et de même sens. En outre, tous les points de  $\Sigma_3$  sont à la même distance  $r$  de l'axe ( $zz'$ ) : la valeur du champ reste donc constante sur  $\Sigma_3$ . D'où :

$$\phi_3 = \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dS = \iint_{\Sigma_3} E(r) dS = E(r) \iint_{\Sigma_3} dS = E(r) \times \Sigma_3 = E \times 2\pi rh.$$

- La charge intérieure au volume délimité par  $\Sigma$  se trouve sur une hauteur  $h$  de fil, soit :  $q_{int} = \lambda \times h$ . Le théorème de Gauss s'écrit donc maintenant :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \text{soit : } E(r) \times 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

On en déduit donc :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

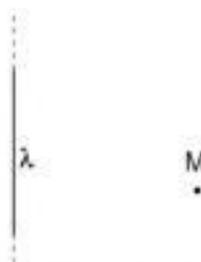


Fig. 19 - Distribution linéique.

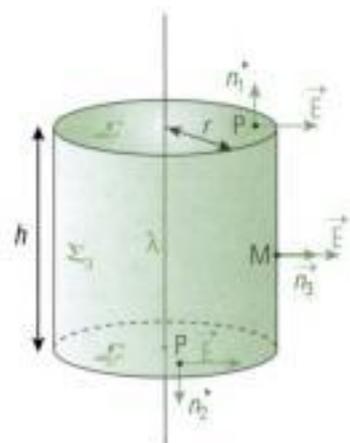


Fig. 20 -  $\Sigma$  est constituée de trois surfaces  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ .

# L'essentiel

## ✓ Expression du champ $\vec{E}$

- Champ créé en un point M par une charge ponctuelle  $q$  placée en P :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

Le champ créé par une collection de charges ponctuelles est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.

- Champ créé en un point M par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  le long d'une ligne  $\Gamma$  :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

Le champ créé par une distribution linéique de charges est défini et continu en tout point de l'espace, sauf en les points de cette distribution.

- Champ créé en un point M par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  sur une surface S :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

Le champ créé par une distribution surfacique de charges est défini et continu en tout point de l'espace, sauf en chaque point de cette distribution (discontinuité à la traversée de la surface chargée).

- Champ créé en un point M par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  dans un volume V :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

Le champ créé par une distribution volumique de charges est défini et continu en tout point de l'espace.

## ✓ Considérations de symétrie et d'invariance

- Le champ électrique  $\vec{E}$  est un vrai vecteur (ou vecteur polaire), car son sens ne dépend pas de l'orientation de l'espace.
- Si la distribution de charges reste inchangée par une symétrie plane, alors le champ  $\vec{E}$  est inclus dans ce plan pour tout point M du plan.
- Si la distribution de charges change de signe par une symétrie plane, alors le champ  $\vec{E}$  est orthogonal à ce plan pour tout point M du plan.
- Si une distribution de charges est invariante par une rotation ou une translation, la valeur du champ  $\vec{E}$  ne dépend pas de la coordonnée correspondante.

## ✓ Théorème de Gauss

- Le flux du champ  $\vec{E}$  à travers la surface S est par définition :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS, \text{ où } \vec{n} \text{ est le vecteur normal à l'élément de surface } dS.$$

- Par convention, on oriente la normale à une surface fermée comme étant « sortante » de la surface. La normale à une surface ouverte est orientée à l'aide de la règle du tire-bouchon.

• Dans le vide, le flux  $\phi$  du champ  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est proportionnel à la charge électrique  $q_{int}$  contenue dans le volume  $V$  délimité par la surface  $S$  :

$$\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \left| \begin{array}{l} \phi \text{ flux en } V \cdot m \\ q_{int} \text{ charge en coulomb (C)} \\ \epsilon_0 \text{ permittivité absolue du vide (SI)} \end{array} \right.$$

## Mise en œuvre

### Méthode n° 1

#### Comment déterminer la « topographie » (direction et variable) d'un champ électrostatique $\vec{E}$ ?

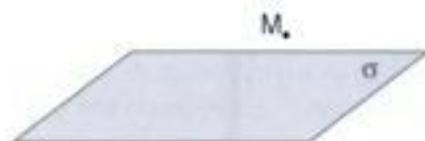
Soit une distribution quelconque de charges et un point  $M$  où le champ  $\vec{E}$  créé par ces charges est défini. On se propose de déterminer la direction du champ en  $M$  et les variables dont dépend sa valeur.

#### → Savoir faire

- 1 Lorsque c'est possible, déterminer par des considérations de symétrie la direction du champ  $\vec{E}$ . En déduire le choix d'un système de coordonnées.
- 2 Lorsque c'est possible, déterminer par des considérations d'invariance les variables dont dépend la valeur du champ. En déduire le choix d'un système de coordonnées.
- 3 Vérifier la cohérence du choix du système de coordonnées par les deux raisonnements précédents (et indépendants). S'il y a plusieurs invariances par translation, on choisit les coordonnées cartésiennes, car ces invariances ne peuvent être traduites en coordonnées cylindriques ou sphériques. S'il y a plusieurs invariances par rotation, on choisit les coordonnées sphériques. S'il y a une seule invariance par rotation et translation, on choisit les coordonnées cylindriques.
- 4 Déduire de toutes ces considérations une expression du champ  $\vec{E}$  dans ce système de coordonnées.

#### → Application

Déterminer la direction du champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  uniforme sur un plan infiniment étendu, ainsi que les variables dont dépend la valeur de ce champ.

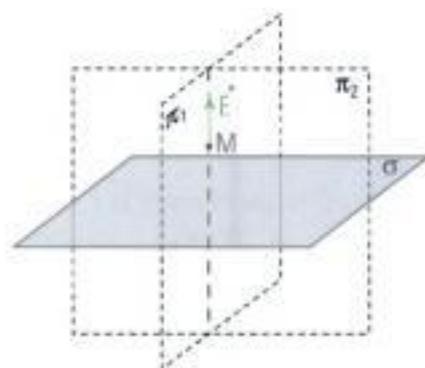


#### Solution

1 Les plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$  perpendiculaires au plan chargé et passant par  $M$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. La direction du champ  $\vec{E}$  est donc portée par l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire par la droite passant par  $M$  et perpendiculaire au plan chargé.

Comme la distribution est plane et que l'on ne perçoit ni d'axe de rotation privilégié, ni de centre de rotation, on peut éliminer *a priori* les coordonnées cylindriques et sphériques. En coordonnées cartésiennes, on nomme  $(Oxy)$  le plan chargé, alors  $\vec{E}$  est porté par l'axe  $(Oz)$  :

$$\vec{E} = E(x, y, z)\vec{u}_z.$$



② La distribution de charges est invariante par toutes les translations de directions incluses dans son plan. Deux invariances par translation imposent le choix des coordonnées cartésiennes. Si on nomme  $(Oxy)$  le plan chargé, celui-ci reste invariant par toute translation de direction  $(Ox)$  ou  $(Oy)$  ; donc le champ  $\vec{E}$  en  $M$  ne dépend ni de la coordonnée  $x$ , ni de la coordonnée  $y$  :

$$E(x, y, z) = E(z).$$

③ Les deux raisonnements aboutissent au choix des coordonnées cartésiennes.

④ D'après ces considérations d'invariance et de symétrie, on a donc en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z.$$

## Méthode n° 2

### Comment déterminer l'expression d'un champ électrostatique $\vec{E}$ ?

Soit une distribution quelconque de charges et un point  $M$  où le champ  $\vec{E}$  créé par ces charges est défini. On se propose de déterminer l'expression vectorielle de  $\vec{E}$  en  $M$ .

#### → Savoir faire

- ① Déterminer la topographie du champ  $\vec{E}$  par des considérations de symétrie et d'invariances. En déduire le choix d'un système de coordonnées (méthode n°1).
- ② Chercher une surface fermée  $\Sigma_1$  sur laquelle la valeur  $E$  du champ est constante. Si cette surface n'est pas fermée, la compléter avec des surfaces  $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots$  à travers lesquelles le flux de  $\vec{E}$  est nul. S'il n'existe pas de telle surface fermée, alors poser l'intégrale qui propose le calcul direct du champ  $\vec{E}$ . La surface fermée totale  $\Sigma$ , si elle existe, est appelée *surface de Gauss*.
- ③ Si la *surface de Gauss* existe, appliquer le théorème de Gauss à cette surface ; en déduire la valeur  $E$  du champ, puis son expression vectorielle  $\vec{E}$ .  
S'il n'existe pas de *surface de Gauss*, calculer « directement » le champ à partir de la définition. Projeter le champ  $\vec{E}$  sur les directions dans lesquelles on sait qu'il n'est pas nul (voir ①). Calculer les intégrales correspondantes. Faire le calcul de chacune des composantes (intégrales scalaires), puis en déduire l'expression vectorielle de  $\vec{E}$ .

#### → Application 1

Déterminer l'expression vectorielle du champ créé en un point  $M$  par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  uniforme sur un plan infiniment étendu.

#### Solution

① D'après la méthode n° 1, on a un système de coordonnées cartésiennes tel que le plan chargé est le plan  $(Oxy)$  :

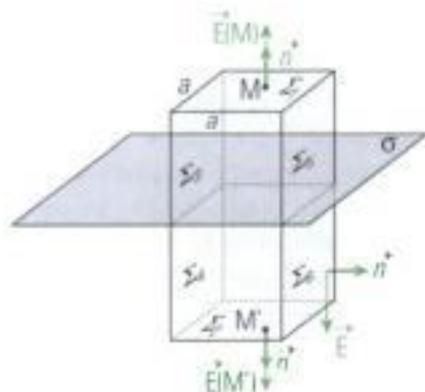
$$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z.$$

② La valeur  $E(z)$  du champ reste constante pour  $z$  donnée. On peut donc considérer une portion du plan parallèle au plan  $(Oxy)$  et passant par  $M$ , par exemple un carré de côté  $a$ , noté  $\Sigma_1$ . Par ailleurs, en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan chargé  $(Oxy)$ , on a :

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$$

car le plan chargé  $(Oxy)$  est plan de symétrie pour la distribution.

On peut donc aussi considérer le carré de côté  $a$  passant par  $M'$  symétrique de  $\Sigma_1$  et noté  $\Sigma_2$ .



En effet le champ  $\vec{E}(M')$ , en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan chargé  $(Oxy)$ , est le symétrique du champ  $\vec{E}(M)$  en  $M$ .

On construit alors le parallélépipède rectangle de bases  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . La surface  $\Sigma$  de ce parallélépipède est fermée et le flux du champ  $\vec{E}$  à travers chaque côté  $\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$  et  $\Sigma_6$  est nul (car en tout point,  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ).

Si l'on écrit  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ , alors  $\vec{E}(M') = -E(z)\vec{u}_z$  et le flux total à travers la surface de Gauss vaut :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 2E(z)a^2, \text{ car } \vec{E} \cdot \vec{n} = E(z) \text{ sur } \Sigma_1 \text{ et sur } \Sigma_2.$$

La charge intérieure au volume délimité par  $\Sigma$  est contenue dans un carré de côté  $a$  :

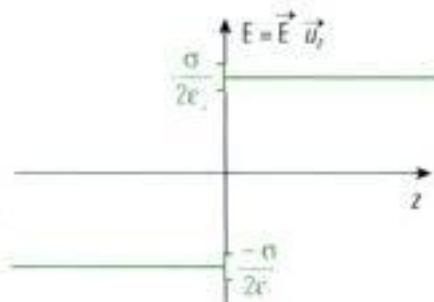
$$q_{\text{int}} = \sigma a^2.$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \text{ soit } 2E(z)a^2 = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}.$$

Il vient alors :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \text{ d'où : } E(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \text{ et } E(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z.$$



Le choix de la surface carrée n'a aucune importance : on aurait aussi bien pu prendre à la place une surface en forme de trèfle à quatre feuilles pourvu qu'elle soit parallèle au plan  $(Oxy)$  et que la valeur  $E$  du champ reste constante.

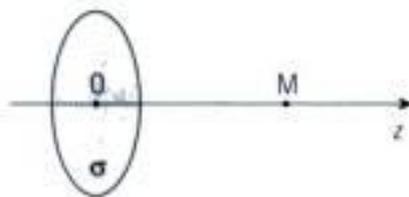


La courbe  $E = f(z)$  montre bien la discontinuité du champ sur le plan chargé ( $z = 0$ ). Un point  $M$  quelconque est l'intersection des plans  $(Mxz)$ ,  $(Myz)$  et  $(Mxy) = (Oxy)$ , plans de symétrie pour la distribution de charges. Il en découle :  $\vec{E} = 0$  pour  $z = 0$ .

C'est bien la valeur moyenne des deux limites du champ lorsque  $z$  s'annule. On atteint alors les limites du modèle : le champ ne diverge pas sur les charges, car la distribution est volumique (même si l'on n'en perçoit pas l'épaisseur). Sa valeur passe donc de  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  à  $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  de manière continue lorsque l'on traverse la surface, mais son épaisseur non mesurable ne laisse voir que la discontinuité.

## → Application 2

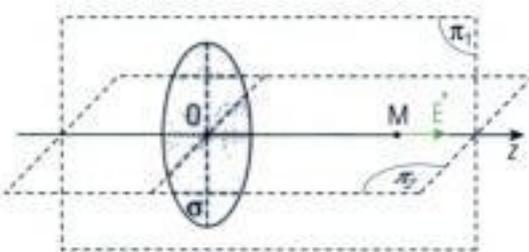
Déterminer l'expression vectorielle du champ  $\vec{E}$  créé en tout point  $M$  de l'axe de révolution d'un disque de centre  $O$  et de rayon  $R$  uniformément chargé en surface avec la densité  $\sigma$  positive et uniforme.



### Solution

On applique la méthode n° 1. Tout plan contenant l'axe de révolution du disque contient aussi le point  $M$  et est un plan de symétrie pour la distribution de charges : le champ  $\vec{E}$  en  $M$  appartient donc à leur intersection, c'est-à-dire à l'axe  $(Oz)$  de révolution du disque. *A priori*, on pourrait choisir indifféremment un système de coordonnées cylindriques ou de coordonnées cartésiennes, mais la forme de la distribution incite à préférer les coordonnées cylindriques, d'autant que la distribution est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  : il faut donc bien choisir les coordonnées cylindriques,  $(Oz)$  étant l'axe du disque autour duquel il y a invariance par rotation (axe de révolution). Le point  $M$  étant sur l'axe, la seule variable est alors sa cote  $z$  et on écrit :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$



❷ Pour trouver une surface de Gauss, il faut que la valeur  $E$  du champ reste constante. Or on ne connaît la direction du champ que sur l'axe ( $Oz$ ). Pour un point  $M$  n'appartenant pas à l'axe, il n'existe qu'un seul plan de symétrie (celui contenant  $M$  et l'axe), insuffisant pour connaître la direction du champ ( $\vec{E} \cdot \vec{n}$  n'est alors pas calculable). En outre, il n'y a qu'une seule invariance (par rotation) : il n'existe donc pas de surface (décrite par la variation de deux coordonnées) telle que la valeur  $E$  reste constante.

Comme on ne peut pas trouver de surface de Gauss, on calcule directement le champ à partir de la définition :

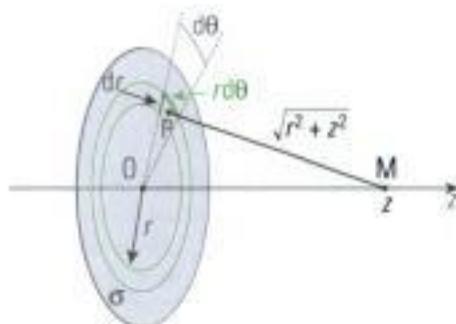
$$\vec{E} = \iint_{P \in S} d\vec{E} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$$

❸ Le champ résultant  $\vec{E}$  est dirigé suivant ( $Oz$ ). On projette chaque champ élémentaire  $d\vec{E}$  sur cet axe pour avoir sa contribution au champ total :

$$d\vec{E} \cdot \vec{u}_z = dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^3}$$

Or :  $\vec{PM} \cdot \vec{u}_z = (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot \vec{u}_z = z$  et  $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$  ;

$$\text{donc : } dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3}$$



En coordonnées cylindriques, on a :  $dS = dr \times r d\theta$ .

Pour parcourir le disque, on intègre donc sur  $r$  (entre 0 et  $R$ ) et sur  $\theta$  (entre 0 et  $2\pi$ ).

$$E_z = \iint_{P \in S} dE_z = \iint_{P \in S} \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} d\theta = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{d(r^2 + z^2)}{2} (r^2 + z^2)^{-3/2} dr \times \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta,$$

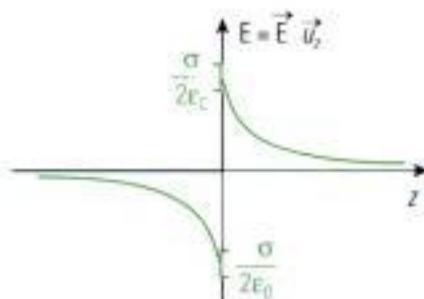
$$E_z = \frac{\sigma z}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(r^2 + z^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + 1 \right]_0^R \times \theta \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] 2\pi,$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{-z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right].$$

D'où finalement :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z.$$

Lorsque l'on trace la courbe  $E = E_z = f(z)$ , la discontinuité en  $z = 0$  apparaît. Au point  $O$ , le plan ( $Oxy$ ) est un plan de symétrie supplémentaire et il vient  $\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$ .



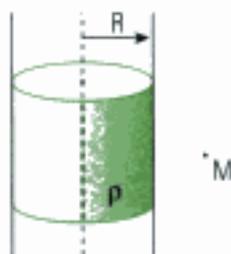
On retrouve la limite du modèle discutée dans l'application 1. Le mieux est de ne pas chercher à calculer le champ sur les surfaces chargées : le problème de la modélisation disparaît alors de lui-même.

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Dans un cylindre

Soit un cylindre  $C$  à base circulaire de rayon  $R$  et de hauteur infinie et soit un point  $M$ . Un champ  $\vec{E}$  est créé par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  uniforme dans le cylindre  $C$ .



Préciser le domaine de définition du champ  $\vec{E}$ , puis déterminer son expression vectorielle. Tracer l'allure de la courbe donnant les variations de la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ en fonction de la position du point  $M$ .

### Ex. 2 Dans une sphère

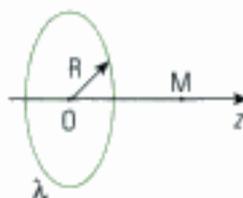
Soit une sphère de rayon  $R$  chargée en volume. Un champ  $\vec{E}$  est créé par la distribution volumique de charges de densité  $\rho$  uniforme.



Préciser le domaine de définition du champ  $\vec{E}$ , puis déterminer son expression vectorielle.

### Ex. 3 Le long d'un cercle

Soit un cercle d'axe  $(Ox)$ , de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Cette circonférence porte une densité de charges linéiques  $\lambda$  uniforme.

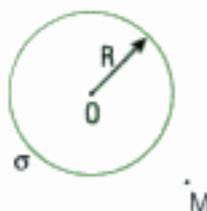


1) Déterminer la direction du champ en tout point  $M$  de l'axe  $(Ox)$ .

2) Calculer  $\vec{E}$  en tout point  $M$  de l'axe  $(Ox)$ . Tracer l'allure de la courbe donnant les variations de la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ en fonction de la position du point  $M$ .

### Ex. 4 Sur une sphère

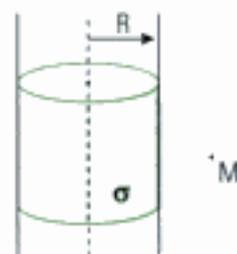
On considère une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ . La surface de la sphère est uniformément chargée avec la densité  $\sigma$  uniforme. Préciser l'ensemble des points  $M$  où le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution est défini.



Calculer la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ en  $M$ .

### Ex. 5 Sur un cylindre

On considère un cylindre, à base circulaire de rayon  $R$  et de hauteur infinie, dont la surface est uniformément chargée avec la densité  $\sigma$  uniforme. Préciser le domaine des points  $M$  où le champ  $\vec{E}$  est défini.

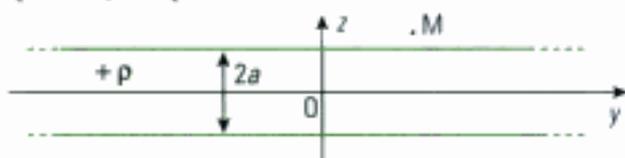


Calculer la valeur  $E = \|\vec{E}\|$  du champ  $\vec{E}$  en  $M$ .

## Niveau 2

### Ex. 6 Dans une couche plane

On s'intéresse au champ  $\vec{E}$  créé par une distribution volumique de charges de densité  $+\rho$  uniforme et positive, comprise entre les cotes  $z = +a$  et  $z = -a$ .



1) Déterminer le domaine de définition et la topographie du champ  $\vec{E}$  (direction, sens, coordonnée(s) d'espace dont dépend sa norme) en un point  $M$ .

2) Déterminer l'expression du champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution en tout point  $M$  où il est défini, puis tracer la courbe donnant les variations de  $E = \|\vec{E}\|$  en fonction de la coordonnée du point  $M$ .

3) En déduire l'expression du champ  $\vec{E}$  créé par deux distributions volumiques de densités uniformes et opposées, dont l'une de densité  $\rho$  occupe l'espace compris entre les plans d'équation  $z = 0$  et  $z = 2a$ , et l'autre de densité  $-\rho$  occupe l'espace compris entre les plans d'équation  $z = 0$  et  $z = -2a$ .

### Ex. 7 Le long d'un segment

On considère le champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  uniforme, le long d'un segment rectiligne  $AB$  de longueur  $L$ .

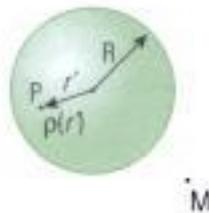


1) Montrer que, dans un système de coordonnées adéquat, l'expression du champ  $\vec{E}$  n'a que deux composantes là où il est défini.

2) Calculer chacune des composantes du champ  $\vec{E}$  en tout point  $M$  où il est défini.

### Ex. 8 Densité non uniforme

Soit une sphère de rayon  $R$ . On considère une distribution volumique de charges, continue mais de densité  $\rho$  non uniforme. La valeur de cette densité dépend de la distance  $r'$  au centre de la sphère :



$$\rho(r') = \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right).$$

Déterminer l'expression vectorielle du champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution de charges en tout point  $M$  de l'espace où il est défini.

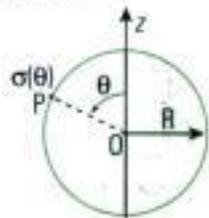
## Niveau 3

### Ex. 9 Non uniforme sur une sphère

Une sphère, de rayon  $R$  et de centre  $O$ , porte en tout point  $P$  de sa surface une distribution surfacique de charges de densité :

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta,$$

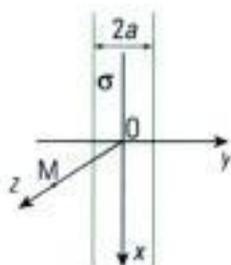
où  $\theta$  est l'angle entre  $(OP)$  et l'axe  $(Oz)$  (diamètre de la sphère).



Déterminer l'expression du champ  $\vec{E}$  au point  $O$ .

### Ex. 10 Sur un ruban

On considère une distribution surfacique de charges, de densité  $\sigma$  répartie uniformément sur un ruban plan rectiligne d'épaisseur  $2a$  et de longueur infinie. On note  $(Oxy)$  le plan du ruban, le ruban étant centré sur l'axe.



1) Quelle sont le domaine de définition et la direction du champ en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  ?

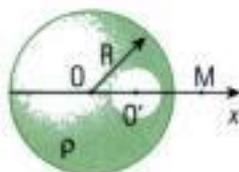
2) Exprimer le champ  $\vec{E}$  en tout point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  où il est défini.

Donnée :  $\int \frac{dx}{x^2 + C^2} = \frac{1}{C} \arctan\left(\frac{x}{C}\right) + K.$

3) En déduire l'expression du champ créé par un plan uniformément chargé.

### Ex. 11 Un trou sphérique

Soit une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , chargée uniformément avec la densité volumique de charges  $\rho$ . Cette sphère possède un trou sphérique (dans lequel il n'y a pas de charges) de

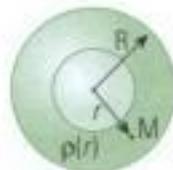


rayon  $\frac{R}{4}$  et de centre  $O'$  se trouvant sur l'axe  $(x'x)$  à la distance  $\frac{R}{2}$  de  $O$ .

Montrer que le champ électrique est uniforme dans le trou sphérique. Déterminer son expression.

### Ex. 12 Symétrie sphérique

On considère une distribution volumique de charges à symétrie sphérique de centre  $O$ . Les charges sont réparties en volume avec une densité  $\rho(r)$ ,  $r$  désignant la distance au point  $O$ .



La densité  $\rho$  est :

- nulle entre  $r = 0$  et  $r = \frac{R}{2}$ , et pour  $r > R$  ;
- non nulle entre  $r = \frac{R}{2}$  et  $r = R$ .

La charge totale de la distribution est  $Q$ . Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution vaut :

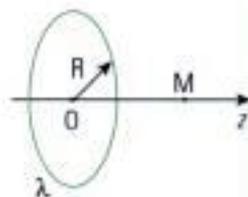
$$\vec{E} = k(\alpha r - R) \vec{u}_r, \text{ dans l'intervalle } \left[\frac{R}{2}; R\right],$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial de la base des coordonnées sphériques.

- 1) Donner le domaine de définition du champ  $\vec{E}$ . Le champ est-il continu partout ?
- 2) Déterminer  $E = \|\vec{E}\|$  pour  $r < \frac{R}{2}$ . En déduire la valeur de  $\alpha$ .
- 3) Déterminer  $E = \|\vec{E}\|$  pour  $r > R$ . En déduire la valeur de  $k$ .
- 4) Appliquer le théorème de Gauss pour un point  $M$  de l'intervalle  $\left[\frac{R}{2}; R\right]$  et obtenir une équation donnant une primitive de la loi  $\rho(r)$  en fonction de  $E = \|\vec{E}\|$ .
- 5) En déduire la loi  $\rho(r)$ . Vérifier l'homogénéité de la formule obtenue.

### Ex. 13 Densité linéique

Soit un cercle d'axe  $(Oz)$ , de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Cette circonférence porte une densité linéique de charges  $\lambda$  uniforme.



1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  en tout point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  où il est défini.

2) On se place maintenant en un point  $M'$  du voisinage du point  $M$  de l'axe de révolution du cercle.  $M$  est le projeté orthogonal de  $M'$  sur l'axe et on note  $r$  la distance  $MM'$ , avec  $r \ll z$ . On admet que la composante axiale  $E_z$  du champ (selon la direction de l'axe) reste constante entre ces deux points. En  $M'$ , le champ n'est plus purement axial selon  $(Oz)$  et pos-

sède donc une autre composante à calculer.

- a) Quelle est la direction de cette autre composante ?
- b) On souhaite calculer l'expression de cette composante en fonction de  $E_z$ . En utilisant un cylindre élémentaire de hauteur  $dz$  et passant par les deux points

$M$  et  $M'$ , établir une équation différentielle reliant les deux composantes du champ.

- c) Calculer alors cette seconde composante en fonction des données. Existe-t-il une valeur de  $z$  pour laquelle cette seconde composante est nulle ? Commenter.

## Indications

### Ex. 1, 2, 4 et 5

Revoir les méthodes n° 1 et 2 pour appliquer le théorème de Gauss.

### Ex. 3

Exprimer le champ élémentaire créé par un élément de longueur.

### Ex. 6

- 1) et 2) Penser à étudier la parité du champ.
- 3) Appliquer le principe de superposition et faire des changements de repère.

### Ex. 7

Se reporter à l'application 2 du cours.

### Ex. 9

Découper la surface en surfaces élémentaires en forme de couronnes et sommer les composantes « utiles » des champs élémentaires.

### Ex. 10

Il est bon parfois de « couper les cheveux en quatre dans le sens de la longueur » : le ruban n'est-il pas un empilement de fils ?

### Ex. 11

Penser au principe de superposition.

### Ex. 12

Le problème tourne autour du théorème de Gauss et de la continuité du champ.

### Ex. 13

La notation différentielle de la dérivée d'une fonction  $f$  s'exprime par :

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}, \text{ avec } dx \rightarrow 0.$$

# Solutions des exercices

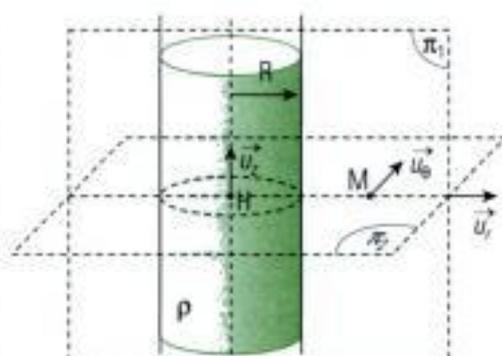
## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

La distribution de charges étant volumique, le champ est défini et continu en tout point. Comme dans la méthode n° 2, on commence par les considérations de symétrie et d'invariance.

#### • Symétries

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe du cylindre. Le plan  $\pi_1$  contient l'axe du cylindre et la droite  $(HM)$ ; le plan  $\pi_2$  contient la droite  $(HM)$  et est perpendiculaire à l'axe du cylindre.  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des plans de symétrie pour la distribution : le champ  $\vec{E}$  est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire la droite  $(HM)$ , et il est dirigé comme  $\vec{HM}$ , c'est-à-dire comme le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  des coordonnées cylindriques. La forme de la distribution incitait à choisir ce système de coordonnées et les plans de symétrie sont facilement identifiables dans ce système :



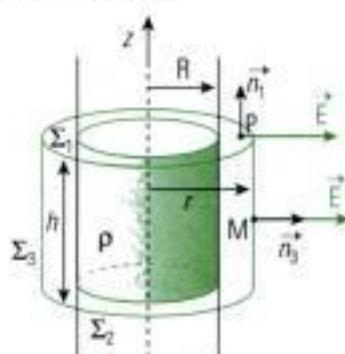
$$\pi_1 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_z) \text{ et } \pi_2 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta), \text{ donc : } \vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r.$$

#### • Invariances

La distribution reste invariante par toute rotation autour de l'axe du cylindre, ainsi que par toute translation le long de son axe. Le système de coordonnées cylindriques est donc adapté car la rotation concerne la coordonnée  $\theta$  et la translation la coordonnée  $z$ . On en déduit  $E = E(r)$ .

Finalement, dans un système de coordonnées cylindriques :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

Recherchons une surface de Gauss. Comme  $\vec{E}$  reste constant lorsque  $r$  est constant, cela définit, en coordonnées cylindriques, un cylindre de rayon  $r$ . Soit  $\Sigma_3$  la surface de ce cylindre. Le champ et la normale sont colinéaires et de même sens : le flux sera proportionnel à  $E$  et simple à exprimer. On ferme ce cylindre par deux disques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  perpendiculaires à l'axe  $(Oz)$  et distants d'une hauteur  $h$ . La surface  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$  est donc fermée. Le flux du champ  $\vec{E}$  à travers deux disques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  est nul, car en tout point  $P$  de  $\Sigma_1$  ou  $\Sigma_2$ , on a :  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ .



Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers  $\Sigma$  vaut :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS}_{= 0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 \, dS}_{= 0} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 \, dS = \iint_{\Sigma_3} E \, dS_3 = E S_3 = E 2\pi r h.$$

Pour calculer la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss, on distingue deux cas :  $M$  se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.

Dans le premier cas, les charges concernées ne sont qu'une partie de celles présentes dans une hauteur  $h$  de la distribution et on prend en compte la totalité du volume délimité par la surface de Gauss :

$$q_{\text{int}}(r < R) = \iiint_V \rho \, dV = \rho \iiint_V dV = \rho V = \rho \pi r^2 h.$$

Dans le second cas, la totalité de la hauteur  $h$  de la distribution se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss, laquelle n'est plus entièrement remplie. Il vient donc :

$$q_{\text{int}}(r > R) = \rho\pi R^2 h.$$

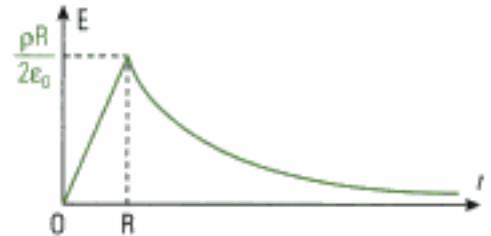
On applique maintenant le théorème de Gauss dans chacun des deux cas précédents :

$$\phi = E2\pi r h = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

- pour  $r < R$  :  $q_{\text{int}}(r < R) = \rho\pi r^2 h$  ;  $\phi = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0}$  ;  $E(r < R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$ , d'où :  $\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$  ;

- pour  $r > R$  :  $q_{\text{int}}(r > R) = \rho\pi R^2 h$  ;  $\phi = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0}$  ;  $E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$ , d'où :  $\vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ .

La courbe donne les variations de  $E$  en fonction de celles de  $r$ . On vérifie que le champ est continu.

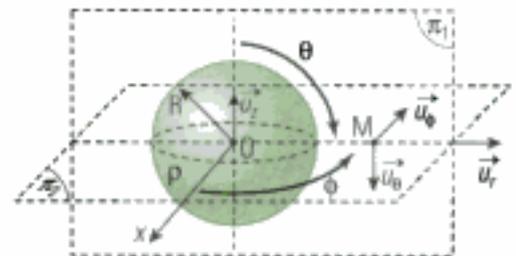


## Exercice 2

La distribution de charges étant volumique, le champ est défini et continu en tout point de l'espace. Comme dans la méthode n° 2, on commence par les considérations de symétrie et d'invariance. Vu la forme de la distribution, on choisit le système de coordonnées sphériques, l'origine  $O$  étant le centre de la sphère.

### • Symétries

Tout plan  $\pi$  contenant la droite  $(OM)$  est plan de symétrie de la distribution. On a tracé, par exemple, les plans  $\pi_1 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $\pi_2 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  : le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  est inclus dans leur intersection, la droite  $(OM)$ . Donc  $\vec{E}$  est dirigé comme  $\vec{OM}$ , c'est-à-dire comme le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  des coordonnées sphériques (ce qui valide le choix du système de coordonnées).



Donc : 
$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \phi) \vec{u}_r.$$

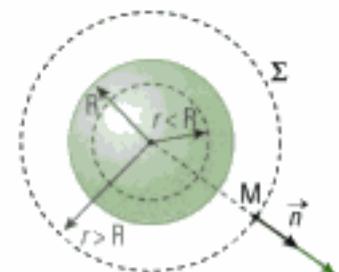
### • Invariances

La distribution est invariante par toute rotation autour de l'origine  $O$ . Deux rotations autour d'un point étant mises en évidence, le système de coordonnées sphériques est adapté.

On en déduit que  $E$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$  :  $E = E(r)$ .

Finalement, dans un système de coordonnées sphériques :  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ .

Recherchons une surface de Gauss.  $E$  reste constant lorsque  $r$  est constant : cela définit, en coordonnées sphériques, une sphère de rayon  $r$ . Sur cette sphère (surface  $\Sigma$ ),  $\vec{E}$  et la normale sont colinéaires et de même sens : le flux sera proportionnel à  $E$  et simple à exprimer. De plus, la surface est fermée. Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers  $\Sigma$  vaut :



$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} E dS = E \iint_{\Sigma} dS = ES = E4\pi r^2.$$

Il reste à calculer la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Deux cas sont à distinguer, selon que  $M$  se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.

Dans le premier cas, les charges concernées ne sont qu'une partie de la charge totale de la distribution et la totalité du volume délimité par la surface de Gauss contient des charges :

$$q_{\text{int}}(r < R) = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Dans le second cas, la totalité de la charge de la distribution se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss, laquelle n'est plus entièrement remplie. Il vient donc :

$$q_{\text{int}}(r > R) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3.$$

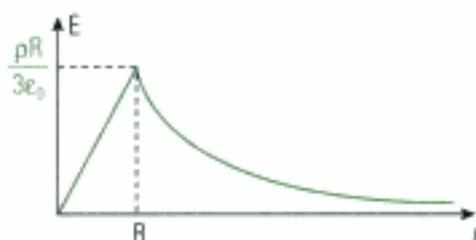
On applique maintenant le théorème de Gauss dans chacun des deux cas précédents :

$$\phi = E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

- Pour  $r < R$  :  $q_{\text{int}}(r < R) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$  ;  $\phi = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$  ;  $E(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ , d'où :  $\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$ .

- Pour  $r > R$  :  $q_{\text{int}}(r > R) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$  ;  $\phi = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0}$  ;  $E(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ , d'où :  $\vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

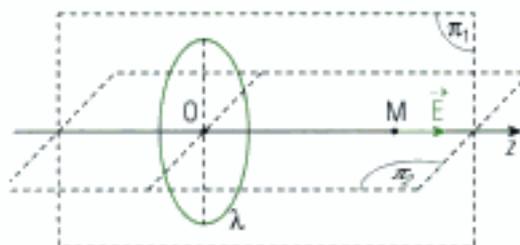
La courbe donne les variations de  $E$  en fonction de celles de  $r$ . On vérifie que le champ est continu.



### Exercice 3

1) Cherchons les plans de symétrie. Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie pour la distribution (ici les deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ). L'intersection de tous ces plans est la droite  $(Oz)$ , donc en tout point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ , le champ  $\vec{E}$  est porté par cet axe :  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ .

2) On ne peut pas trouver de surface de Gauss car on ne connaît la direction du champ  $\vec{E}$  que sur l'axe  $(Oz)$  : en dehors de cet axe, on ne peut plus trouver qu'un seul plan de symétrie, ce qui est insuffisant pour trouver la direction de  $\vec{E}$ . De plus, il n'y a qu'une seule invariance par rotation, ce qui empêche de trouver une surface pour laquelle  $E$  reste constant.



Il faut donc procéder au calcul « direct » du champ. La distribution étant linéique :

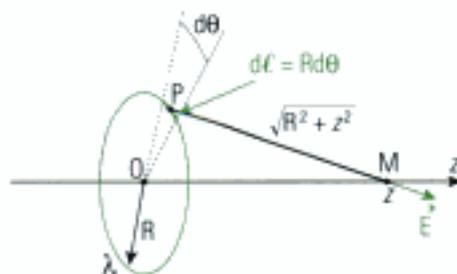
$$\vec{E}(M) = \int \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

On sait que le champ résultant est dirigé suivant  $(Oz)$ . On projette donc chaque champ élémentaire sur cet axe pour avoir sa contribution au champ total (composante « utile ») :

$$d\vec{E} \cdot \vec{u}_z = dE_z = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^3}.$$

Or :  $\vec{PM} \cdot \vec{u}_z = (\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot \vec{u}_z = z$  et  $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$ , d'où :

$$dE_z = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}.$$



Il reste à exprimer  $d\ell$ . Vu la forme de la distribution, les coordonnées cylindriques (et même polaires ici, car le cercle reste dans le plan  $(Oxy)$ ) sont adaptées :  $d\ell = R d\theta$ , car on intègre sur  $\theta$  (entre 0 et  $2\pi$ ) pour parcourir le cercle :

$$E_z = \int_{P \in \text{cercle}} dE_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$

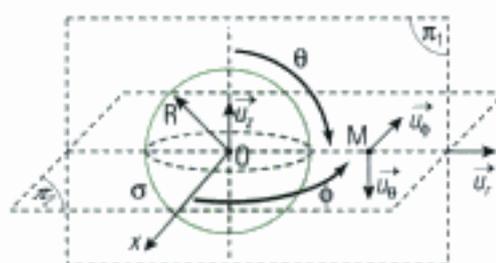
Finalement : 
$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z$$

En fait, cette expression reste valable lorsque  $z < 0$ , car le plan  $(Oxy)$  du cerceau est plan de symétrie, le champ  $\vec{E}'$  au symétrique  $M'$  de  $M$  est le symétrique de  $\vec{E}$ , c'est-à-dire  $-\vec{E}$  : le champ est donc une fonction impaire de la variable  $z$ . Or la formule ci-dessus est une fonction impaire de la variable  $z$ , donc elle reste valable lorsque  $z < 0$ .

### Exercice 4

La distribution est surfacique, donc le champ  $\vec{E}$  est défini et continu partout, sauf sur les charges. On ne cherchera donc pas à le calculer sur la surface de la sphère.

Les considérations de symétrie et d'invariance sont identiques à celles de l'exercice 2. En effet, on conserve une forme sphérique pour le dispositif, avec une distribution de densité uniforme. Le schéma est identique aussi. En coordonnées sphériques :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .



La surface de Gauss est aussi une sphère de rayon  $r = OM$ . Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers cette surface a été obtenu :

$$\phi = E4\pi r^2$$

Il reste à calculer la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Deux cas sont à distinguer, selon que  $M$  se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère sur laquelle est déposée la distribution de charges.

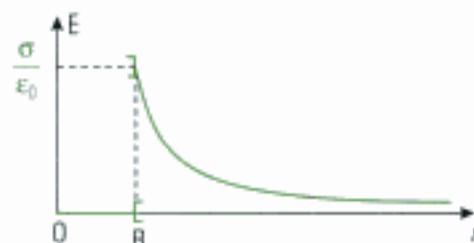
Lorsque  $r < R$ , la surface de Gauss est plus petite que la sphère chargée et les charges sont toutes à l'extérieur de la surface de Gauss :  $q_{\text{int}} = 0$ .

Le théorème de Gauss donne :  $\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$ , soit  $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ .

Lorsque  $r > R$ , la surface de Gauss est plus grande que la sphère chargée et contient la totalité des charges :  $q_{\text{int}} = \sigma 4\pi R^2$ .

Le théorème de Gauss donne :  $\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$ , soit  $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

On trace la courbe donnant les variations de  $E$  en fonction de  $r$ . On remarque la discontinuité du champ lorsque l'on arrive sur la sphère chargée.



### Exercice 5

La distribution est surfacique, donc le champ  $\vec{E}$  est défini et continu partout, sauf sur les charges. On ne cherchera donc pas à le calculer sur la surface de la sphère.

Les considérations de symétrie et d'invariance sont identiques à celles de l'exercice 1). En effet, on conserve une forme cylindrique pour le dispositif, avec une distribution de densité uniforme. Le schéma est identique et rappelle les symétries et invariances.

En coordonnées cylindriques :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

La surface de Gauss est aussi la même que celle trouvée dans l'exercice 1), à savoir un cylindre de rayon  $r = OM$  et de hauteur  $h$ . Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers cette surface a été obtenu.

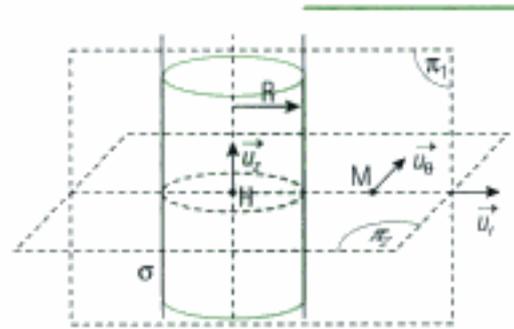
Il reste à calculer la charge se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Deux cas sont à distinguer, selon que  $M$  se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre sur lequel est déposée la distribution de charges.

– Lorsque  $r < R$ , le cylindre de Gauss est plus petit que le cylindre chargé et les charges sont toutes à l'extérieur de la surface de Gauss :  $q_{int} = 0$ .

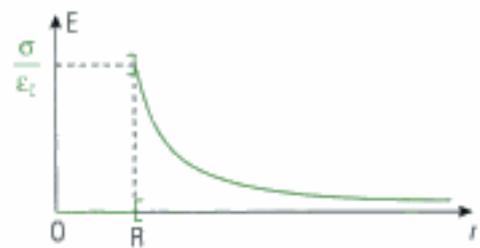
Le théorème de Gauss donne :  $\phi = E2\pi rh = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$ , soit  $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ .

– Lorsque  $r > R$ , le cylindre de Gauss est plus grande que le cylindre chargé et contient la totalité des charges :  $q_{int} = \sigma 2\pi R h$ .

Le théorème de Gauss donne :  $\phi = E2\pi rh = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0}$ , soit  $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ .



On trace la courbe donnant les variations de  $E$  en fonction de  $r$ . On remarque la discontinuité du champ lorsque l'on arrive sur le cylindre chargé.



## Exercices de niveau 2

### Exercice 6

1) Les charges sont volumiques : le champ  $\vec{E}$  est défini et continu partout.

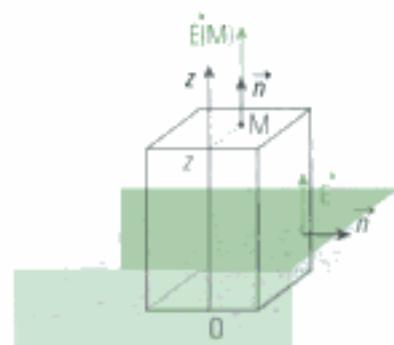
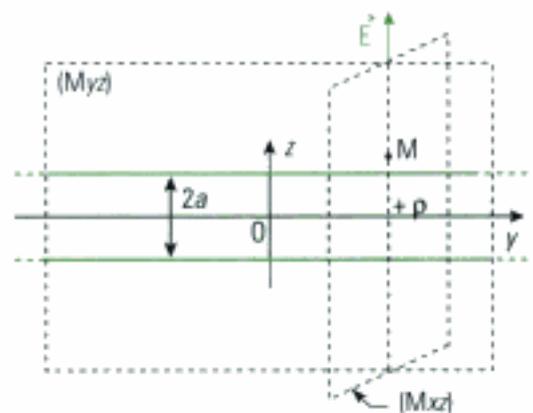
Déterminons le sens de  $\vec{E}$  grâce aux considérations de symétrie. On se place en coordonnées cartésiennes, car ce système est préconisé par l'énoncé et la forme de la distribution est parallélépipédique. Les plans  $(Myz)$  et  $(Mxz)$  sont plans de symétrie de la distribution : le champ est inclus dans leur intersection, la droite  $(Mz)$ .

Donc :  $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_z$ .

On constate deux invariances par translation selon les directions des axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  : le champ ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ , et  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ .

2) La situation concernant la topographie du champ est la même que celle de l'application 1 de la méthode n° 2 de ce chapitre : on pourra donc appliquer le théorème de Gauss. La surface de Gauss sera un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Une des faces passe par le point  $M$  et possède la surface  $S$ , et donc flux de  $\vec{E}$  se calcule facilement. Le problème est de trouver la seconde face parallèle à celle-ci et à travers laquelle on connaît le flux.



Ici, on remarque que le plan (Oxy) coupe la distribution en son milieu et est encore plan de symétrie pour cette distribution. Le champ  $\vec{E}'$  au symétrique  $M'$  de  $M$  est le symétrique de  $\vec{E}$ , c'est-à-dire  $-\vec{E}$  : le champ est une fonction impaire de la variable  $z$  et on n'a donc besoin de le calculer que pour  $z > 0$ .

En tout point  $M_0$  du plan (Oxy), il y a trois plans de symétrie orthogonaux : le champ  $\vec{E}$  y est nul. La surface de Gauss (dessinée en pointillés) passe par  $M$  et repose sur le plan (Oxy). Le flux de  $\vec{E}$  à travers les quatre faces non perpendiculaires à (Oz) est nul (car  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ). Le flux à travers la face reposant sur le plan (Oxy) est nul (car  $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$ ). Le flux à travers la face qui passe par  $M$  est :  $\phi = E(z)S$  et vaut donc le flux total.

Il reste à exprimer la charge intérieure à la surface de Gauss. Elle dépend de la position de  $M$ .

- Pour  $z > a$ , les charges intérieures sont comprises dans un cylindre de base  $S$  et de hauteur  $a$  :

$$q_{\text{int}} = \rho Sa.$$

- Pour  $a > z > 0$ , les charges intérieures sont comprises dans un cylindre de base  $S$  et de hauteur  $z$  :

$$q_{\text{int}} = \rho Sz.$$

Appliquons le théorème de Gauss.

$$\text{Pour } z > a, \phi = E(z)S = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho Sa}{\epsilon_0}, E(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

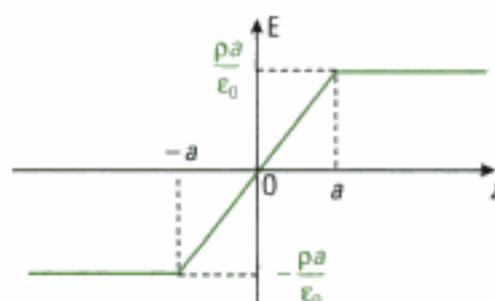
$$\text{Pour } a > z > 0, \phi = E(z)S = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho Sz}{\epsilon_0}, E(a > z > 0) = \frac{\rho z}{\epsilon_0}.$$

L'expression finale du champ est obtenue complétant par imparité :

$$\bullet \vec{E}(z < -a) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z;$$

$$\bullet \vec{E}(-a < z < a) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z;$$

$$\bullet \vec{E}(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z;$$



On trace la courbe  $E = f(z)$ .



Pouvait-on choisir une autre surface de Gauss ?

On a utilisé le fait, dans la question 2, que le champ est nul sur le plan (Oxy) pour « fermer » la surface. On pouvait aussi utiliser la propriété de parité du champ :  $E(z) = -E(-z)$ . On prend alors la même surface de Gauss que dans l'application 1 de la méthode n° 2 de ce chapitre. Le flux est alors le double :  $\phi = 2E(z)S$ . Mais la charge intérieure est aussi doublée et on aboutit au même résultat.

3) On procède par superposition. Le champ  $\vec{E}^+$  créé par la distribution positive est celui calculé précédemment, mais avec un changement d'origine, car il faut  $\vec{E}^+(z = a) = \vec{0}$ . Il faut donc changer  $z$  en  $z - a$  dans le champ  $\vec{E}$  précédent, et on obtient :

$$\vec{E}^+(z < 0) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z ; \vec{E}^+(0 < z < 2a) = \frac{\rho(z - a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z ; \vec{E}^+(z > 2a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

Pour obtenir le champ  $\vec{E}^-$  créé par la distribution négative, il suffit de changer  $z$  en  $z + a$  et  $\rho$  en  $-\rho$  dans  $\vec{E}$  :

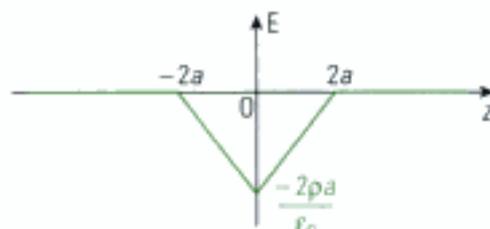
$$\vec{E}^-(z < -2a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z ; \vec{E}^-(-2a < z < 0) = -\frac{\rho(z + a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z ; \vec{E}^-(z > 0) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

Le champ total  $\vec{E}_i$  est la somme des deux précédents, avec maintenant quatre intervalles :

$$\bullet \vec{E}_i(z < -2a) = \vec{E}^-(z < -2a) + \vec{E}^+(z < 0) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z - \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \vec{0};$$

- $\vec{E}_1(-2a < z < 0) = \vec{E}^-(z < 0) + \vec{E}^+(z < 0) = -\frac{\rho(z+a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z - \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\rho(z+2a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  ;
- $\vec{E}_1(0 < z < 2a) = \vec{E}^-(z > 0) + \vec{E}^+(0 < z < 2a) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\rho(z-a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\rho(z-2a)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  ;
- $\vec{E}_1(z > 2a) = \vec{E}^-(z > 0) + \vec{E}^+(z > 2a) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z = \vec{0}$ .

La courbe  $E_t = f(z)$  a donc l'allure suivante :



## Exercice 7

1) Le plan contenant M et le segment est plan de symétrie pour la distribution. Ainsi, le champ en M est inclus dans ce plan : il n'a pas de composante orthogonale à ce plan. Comme la distribution est invariante par rotation autour de l'axe du segment, on choisit un système de coordonnées cylindriques avec l'axe  $(Oz)$  contenant le segment chargé.

Le plan de symétrie est le plan  $(M; \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  et champ électrostatique  $\vec{E}$  en M n'a donc pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$ .

2) Le champ  $\vec{E}$  n'est pas défini sur les charges car la distribution est linéique. Il est défini et continu partout ailleurs.

Comme on ne connaît pas la direction du champ en tout point et qu'il n'y a qu'une invariance, on ne pourra pas appliquer le théorème de Gauss pour calculer  $\vec{E}$ . Il reste l'intégrale qui le calcule « directement ». En orientant l'axe  $(Oz)$  de A vers B :

$$\vec{E}(M) = \int_{\Gamma} d\vec{E} = \int_A^B \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

**!** Il est important d'orienter l'axe, car  $d\vec{l} = dz$  doit être positif et si l'on intègre de A vers B,  $dz$  sera positif si l'axe est orienté de A vers B.

Le principe du calcul est le même que pour l'application 1 du cours de ce chapitre.

La méthode est la même, seules les bornes d'intégration changent. On rappelle donc les étapes du calcul sans en développer les arguments.

Les composantes du champ  $\vec{E}$  s'écrivent :

$$E_r = \int_{z=z_A}^{z=z_B} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} ; \quad E_z = \int_{z=z_A}^{z=z_B} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z}{(\sqrt{r^2+z^2})^3}$$

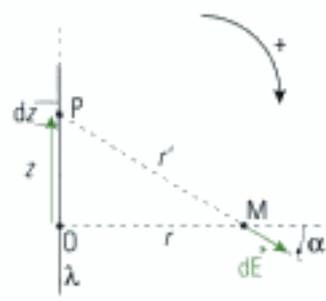
On change de variable en prenant l'angle  $\alpha$  tel que  $\tan\alpha = \frac{z}{r}$ .

On a alors  $d(\tan\alpha) = (1 + \tan^2\alpha)d\alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dz}{r}$ , car  $r$  reste inchangé.

Lorsque  $z \rightarrow z_A$ , alors  $\alpha \rightarrow \alpha_1$ , et  $z \rightarrow z_B$  correspond à  $\alpha \rightarrow \alpha_2$ .

Les composantes du champ peuvent maintenant être calculées, en substituant  $z = r \tan\alpha$ ,  $dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}$  et  $\sqrt{r^2+z^2} = \frac{r}{\cos\alpha}$  :

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{-r \tan\alpha}{(r/\cos\alpha)^3} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d(-\cos\alpha) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [-\cos\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \end{aligned}$$

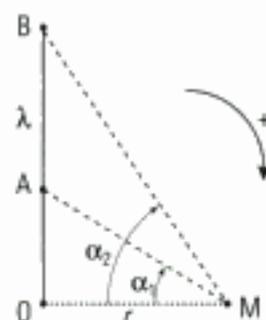


$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{r}{(r/\cos\alpha)^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d(\sin\alpha) , \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1). \end{aligned}$$

On peut enfin exprimer les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en fonction des données  $L, r, z_A$  et  $z_B$  :

$$\cos\alpha_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z_A^2}} ; \sin\alpha_1 = \frac{z_A}{\sqrt{r^2 + z_A^2}} ;$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z_B^2}} ; \sin\alpha_2 = \frac{z_B}{\sqrt{r^2 + z_B^2}} ; L = z_B - z_A.$$



## Exercice 8

Nous appliquons encore le méthode n° 2, très générale lorsque l'on souhaite calculer un champ électrostatique.

Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution est défini et continu partout car la distribution de charges est volumique.

Les considérations de symétries et d'invariances sont identiques à celles de l'exercice 2. Les plans de symétrie sont en effet conservés (même forme) et les invariances se répètent car la densité ne dépend pas des angles  $\theta$  et  $\phi$ .

Dans un système de coordonnées sphériques (préconisé par l'énoncé car celui-ci parle de « distance à un point », et vu la forme de la distribution) :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ , où  $r = OM$ .

On rappelle ci-contre le schéma faisant apparaître ces considérations géométriques.

Comme l'on connaît la direction de  $\vec{E}$  et la variable dont il dépend en tout point M de l'espace, on peut espérer raisonnablement aboutir en appliquant le théorème de Gauss.

La surface de Gauss reste, comme dans l'exercice 2, une sphère centrée sur O et de rayon  $r = OM$ , pour les mêmes raisons. Le flux de  $\vec{E}$  à travers cette surface fermée a aussi été calculé :

$$\phi = E4\pi r^2.$$

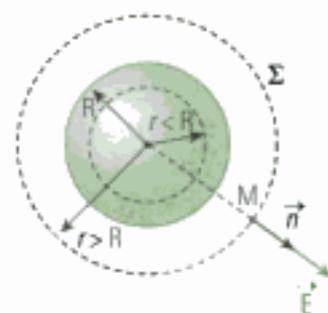
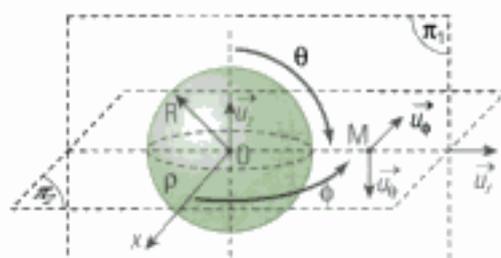
Mais le calcul de la charge intérieure est différent car la densité est ici non uniforme. Il reste cependant deux cas à considérer :  $r < R$  pour lequel la charge intérieure est celle contenue dans la sphère de Gauss et n'est pas la charge totale, ou  $r > R$  pour lequel la charge totale de la distribution se trouve à l'intérieur de la sphère de Gauss.

– Pour  $r < R$  :

$$\begin{aligned} q_{\text{int}}(r < R) &= \iiint_V \rho(r') dV = \iiint_V \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \rho_0 \int_{r'=0}^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \times \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2} \right]_0^r = 4\pi\rho_0 r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right). \end{aligned}$$



Lorsqu'il y a des invariances selon les angles, la grandeur à intégrer ne dépend que de  $r$ . On peut intégrer directement sur les angles. Le volume élémentaire est celui d'une couronne sphérique comprises entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  et devient  $dV = 4\pi r^2 dr$ .



- Pour  $r > R$ , l'intégrale est la même, seule la borne d'intégration change : on intègre entre 0 et R au lieu de la faire entre 0 et  $r$ . On a alors :

$$q_{int}(r > R) = 4\pi\rho_0 \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right]_0^R = 4\pi\rho_0 R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{R^2}{5R^2} \right) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$$

On applique maintenant le théorème de Gauss dans chacun des deux cas précédents :

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Lorsque  $r < R$  :  $q_{int}(r < R) = 4\pi\rho_0 r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right)$  ;  $\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right)$  ;

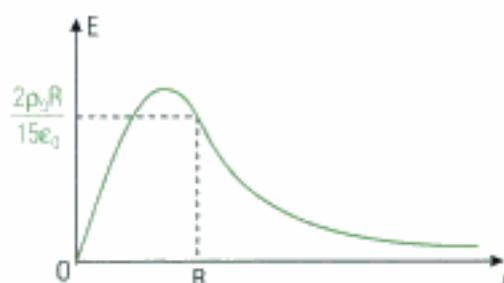
$$E(r < R) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right), \text{ d'où : } \vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right) \vec{u}_r ;$$

- Lorsque  $r > R$  :  $q_{int}(r > R) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$  ;  $\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15\epsilon_0}$  ;

$$E(r > R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2}, \text{ d'où : } \vec{E}(r > R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

La courbe donne les variations de E en fonction de celles de r.

On vérifie que le champ est continu.



## Exercices de niveau 3

### Exercice 9

1) Il s'agit de calculer le champ créé par une distribution surfacique de charges en un seul point. On ne constate qu'une invariance par rotation autour de l'axe (Oz). En revanche, tous les plans contenant l'axe (Oz) sont, du fait de l'invariance, des plans de symétrie pour la distribution : le champ est dirigé selon (Oz) en tout point M de cet axe, donc aussi en O.

On calcule ce champ par intégration à partir de la distribution qui le crée (calcul \* direct \*) :

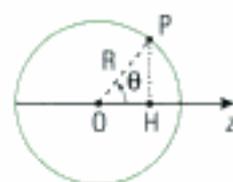
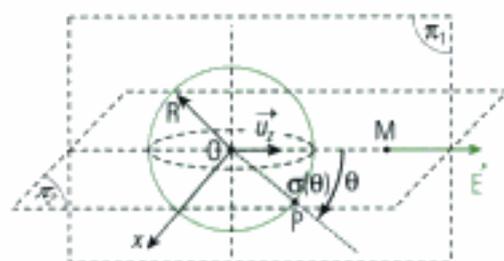
$$\vec{E}(O) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PO}}{PO^3}$$

On sait que le champ résultant est suivant (Oz). On projette donc chaque champ élémentaire sur cet axe pour avoir sa contribution au champ total.

$$d\vec{E}(O) \cdot \vec{u}_z = dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PO} \cdot \vec{u}_z}{PO^3}, \text{ avec } OP = R.$$

$$\text{or } \vec{PO} \cdot \vec{u}_z = (\vec{PH} + \vec{HO}) \cdot \vec{u}_z = -R \cos\theta, \text{ donc } dE_z = \frac{-\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R^2}.$$

Il reste à exprimer dS. Vu la forme de la distribution, les coordonnées sphériques d'axe (Oz) conviennent ( $\theta$  est alors l'angle correspondant des coordonnées sphériques) :  $dS = R \sin\theta d\phi \times R d\theta$ .



On intégrera sur  $\theta$  (entre 0 et  $\pi$ ) et  $\phi$  (entre 0 et  $2\pi$ ) pour parcourir la surface de la sphère. Avec  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ , on obtient :

$$E_z = \iint_{P \in \text{Sphère}} dE_z = \frac{\overbrace{\sigma}^{\sigma_0 \cos\theta} \overbrace{dS}^{R^2 \sin\theta d\theta d\phi}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \times \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi,$$

$$E_z = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta d(\cos\theta) \times 2\pi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[ \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0},$$

$$\vec{E}(\mathbf{O}) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z.$$

## Exercice 10

1) La distribution est surfacique, donc le champ  $\vec{E}$  créé en M par cette distribution est défini et continu partout sauf sur les charges : on ne le calculera pas au point O.

L'énoncé propose un système d'axes de coordonnées cartésiennes : gardons nous de le contredire (la géométrie du ruban est conforme à ce choix). Les plans (Oxy) et (Oxz) sont plans de symétrie pour cette distribution. Le champ  $\vec{E}$  en M est donc inclus dans leur intersection (Oz) :  $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ .

2) Comme on ne connaît pas la direction de  $\vec{E}$  en tout point de l'espace, le théorème de Gauss ne donnera rien. Il faut donc passer par un calcul « direct ».

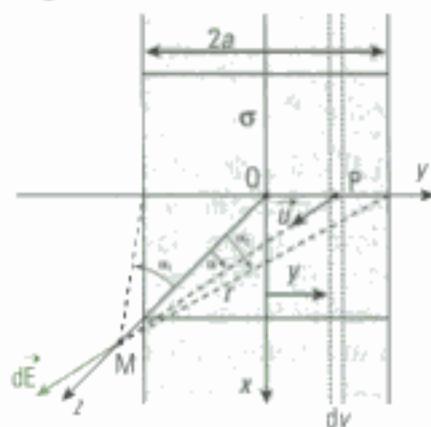
La démarche physique est de découper le ruban en fils rectilignes. On connaît en effet l'expression du champ électrostatique créé par un fil rectiligne (voir les applications 1 ou 3 de ce chapitre). Il restera à sommer les champs des fils consécutifs. Le but de cette démarche est de ne pas avoir à calculer une intégrale double indigeste, d'autant plus que l'expression du champ électrostatique créé par un fil a été assez simplement obtenue dans l'application 3 grâce au théorème de Gauss.

Un fil est défini par une épaisseur infinitésimale  $dy$  de ruban. Une longueur unité  $l = 1$  m de ruban porte la charge  $dq = \sigma dS = \sigma dy \times l = \sigma dy$ . On définit pour le fil une densité linéique  $\lambda$  telle que la charge que possède son unité de longueur est  $\lambda$ . La densité linéique du fil défini par une bande d'épaisseur infinitésimale découpé dans le ruban est donc  $\lambda = \sigma dy$ .

Le champ créé par le fil est donc élémentaire, et on en reprend l'expression calculée dans les applications 1 ou 3 :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r, \text{ soit ici } d\vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r, \text{ avec } \vec{u}_r = \frac{\vec{PM}}{PM},$$

$r = PM$ , P étant le projeté orthogonal de M sur le « fil ».



Il reste à projeter sur l'axe (Oz) et sommer ces composantes « utiles » pour avoir le champ total  $\vec{E}$  :

$$dE_z = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^2} = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{PO} + \vec{OM}) \cdot \vec{u}_z}{PM^2} = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{y^2 + z^2}, \text{ où } z \text{ est la cote de M (fixée),}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-a}^a \frac{dy}{y^2 + z^2} = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{y}{z}\right) \right]_{-a}^a = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right).$$

Mais remarquons que  $\frac{a}{z} = \tan\alpha_2 = \tan(-\alpha_1)$ . Donc  $\arctan\left(\frac{y}{z}\right) = \alpha_2$  et le champ s'écrit :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right) \vec{u}_z = \frac{\sigma\alpha_2}{\pi\epsilon_0} \vec{u}_z,$$

où  $\alpha_2$  est le demi-angle sous lequel on voit la largeur du ruban depuis M.

3) Si le ruban s'élargit jusqu'à devenir un plan infini, alors  $\alpha_2$  grandit jusqu'à atteindre  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\vec{E}(M) \rightarrow \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{2} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \text{ qui est bien le champ créé par un plan infini chargé.}$$

Ce champ a été calculé dans l'application n° 1 de la méthode n° 2 de ce chapitre.

### Exercice 11

Soit un point M quelconque de la cavité. Seul le plan contenant M et l'axe (Ox) est plan de symétrie pour la distribution, et on ne constate qu'une seule invariance par rotation autour de l'axe (Ox) : le théorème de Gauss ne donnera rien.

Le calcul direct est une intégrale triple et la cavité impose des conditions délirantes sur les bornes d'intégration... le calcul direct est impossible à faire.

En revanche, on sait calculer facilement le champ  $\vec{E}$  créé par une sphère uniformément chargée en volume. Cela a été fait dans l'exercice 2. Il faut donc se ramener à une sphère uniformément pleine.

La solution est de remplacer la cavité par la superposition de deux sphères pleines de charges volumiques et de densités opposées et égales à  $+\rho$  et  $-\rho$ .

La distribution devient alors la superposition de deux sphères pleines uniformément chargées en volume, la première de rayon R, de centre O et chargée avec la densité  $\rho$ , la seconde de centre O', de rayon  $\frac{R}{4}$  et chargée avec la densité  $-\rho$ .

Le champ créé par cette superposition est la somme des champs électrostatiques créés par chacune des sphères.

Rappelons les résultats de l'exercice 2, dans lequel le champ créé par une sphère de rayon R et de centre O pleine avec la densité volumique  $\rho$  a été calculé :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}, \text{ car } \vec{OM} = r \vec{u}_r; \vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{OM}.$$

On applique maintenant ce résultat à un point M quelconque de la cavité. Ce point est intérieur à chacune des deux sphères chargées et le champ est la somme des deux expressions correspondantes :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{O'M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} - \vec{O'M}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}.$$

Ce champ est bien uniforme.

### Exercice 12

1) Les charges sont volumiques et le champ est défini et continu partout.

2) Le champ est dirigé selon  $\vec{u}_r$  dans l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; R\right]$ , la densité volumique de charge ne dépend que de  $r$  : tout passant par M et O est plan de symétrie pour la distribution et le champ est dirigé selon  $\vec{u}_r$  en tout point M. De plus, on constate deux invariances par rotation autour de O, donc en coordonnées sphériques :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$  pour tout point M.

Appliquons donc le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée de Gauss une sphère centrée sur O et passant par M (donc de rayon  $r = OM$ ). Cette démarche a déjà été faite à l'identique dans l'exercice 2 et on en reporte le résultat :

$$\phi = E4\pi r^2.$$

Lorsque M est tel que  $r < \frac{R}{2}$ , la sphère de Gauss ne contient aucune charge car  $\rho\left(r < \frac{R}{2}\right) = 0$ .

Donc  $q_{\text{int}} = 0$  et le théorème de Gauss donne :

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0, \text{ donc } \vec{E}\left(r < \frac{R}{2}\right) = \vec{0}.$$

Le champ est nul dans la cavité  $0 < r < \frac{R}{2}$  et vaut  $\vec{E} = k(\alpha r - R)\vec{u}_r$ , pour  $\frac{R}{2} < r < R$ .

Il est continu en  $r = \frac{R}{2}$  car les charges sont volumiques, et les deux champs sont égaux :

$$\vec{E}\left(r = \frac{R}{2}\right) = \vec{0} = k\left(\alpha \frac{R}{2} - R\right)\vec{u}_r, \text{ soit } \alpha = 2.$$

3) Lorsque M est à l'extérieur de la distribution ( $r > R$ ), appliquons encore le théorème de Gauss. La surface reste la même, donc le flux du champ est inchangé. D'autre part, la charge intérieure est la charge totale Q et le théorème de Gauss s'écrit donc simplement :

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ soit } \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

De plus, on écrit que le champ est continu pour  $r = R$  en égalant les deux expressions

$\vec{E} = k(2r - R)\vec{u}_r$ , pour  $\frac{R}{2} < r < R$  et  $\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ , lorsque  $r = R$  :

$$\vec{E}(r = R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r = k(2R - R)\vec{u}_r = kR\vec{u}_r, \text{ soit } k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

4) On applique maintenant le théorème de Gauss pour un point M de la distribution  $\frac{R}{2} < r < R$ . Le flux reste le même mais la charge intérieure n'est pas évidente à exprimer car on ne connaît pas la loi  $\rho(r)$  :

$\phi = E4\pi r^2$  et

$$\begin{aligned} q_{int} &= \iiint_V \rho(r') dV = \iiint_V \rho(r') r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \times \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta}_2 \times \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &= 4\pi \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr', \end{aligned}$$

$4\pi r'^2 dr'$  est le volume élémentaire  $dV$  intégré sur les angles. Il représente physiquement le volume de la couronne sphérique comprise entre les deux sphères de rayons  $r'$  et  $r' + dr'$ . Dans cette couronne d'épaisseur infinitésimale, la densité volumique  $\rho$  reste constante.

Le théorème de Gauss appliqué au point M de la distribution donne :

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r'=0}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr', \text{ soit } E4\pi\epsilon_0 r^2 = 4\pi \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr',$$

expression dans laquelle le second membre représente mathématiquement une primitive de la loi

$r^2\rho(r)$  exprimée en fonction de  $\vec{E}\left(\frac{R}{2} < r < R\right) = k(\alpha r - R)\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2r - R)\vec{u}_r$  :

$$E\epsilon_0 r^2 = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \text{ devient } \frac{Qr^2}{4\pi R^3} (2r - R) = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

5) On souhaite l'expression de la loi  $\rho(r)$  dont on ne connaît qu'une primitive. Dérivons donc cette expression :

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \right) = r^2 \rho(r) = \frac{d}{dr} \left( \frac{Qr^2}{4\pi R^3} (2r - R) \right) = \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{d}{dr} (2r^3 - Rr^2) = \frac{Q}{4\pi R^3} (6r^2 - 2Rr),$$

$$\rho(r) = \frac{Q}{2\pi R^3} \left( 3 - \frac{R}{r} \right).$$

La parenthèse étant sans dimension, le rapport  $\frac{Q}{R^3}$  est bien une charge électrique divisée par un volume, soit des coulombs par mètre cube, c'est-à-dire une densité volumique de charges.

### Exercice 13

1) Un calcul « direct » par intégration et assez facile à réaliser aboutit au résultat (voir exercice 3) :

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

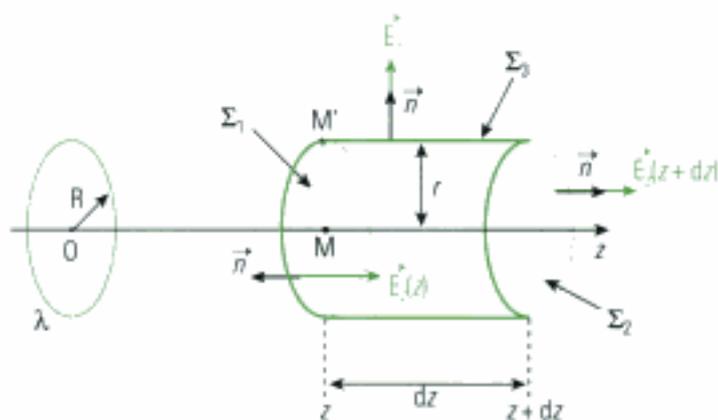
2) a) Au vu de l'invariance par rotation autour de l'axe (Oz) et de la forme de la distribution, on choisit les coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Le plan contenant M' et l'axe (Oz), c'est-à-dire le plan (M' ;  $\vec{u}_r, \vec{u}_z$ ), est plan de symétrie pour la distribution :  $\vec{E}(M')$  est donc inclus dans ce plan et n'a pas de composante selon  $\vec{u}_\theta$  :  $\vec{E}(M') = E_r \vec{u}_r + E_z \vec{u}_z$ .

b) Appliquons le théorème de Gauss pour le cylindre proposé, compte tenu des hypothèses.

Le cylindre est représenté sur la figure ci-contre et possède des dimensions agrandies par rapport à la réalité afin de rendre le schéma plus lisible.

Le cylindre est une surface fermée. Il est constitué des bases  $\Sigma_1$  à la cote  $z$  et  $\Sigma_2$  à la cote  $z + dz$ , et son enveloppe  $\Sigma_3$ . Il est vide de charges et le flux du champ électrostatique est donc nul, par application du théorème de Gauss.

$$\phi = 0 = \phi_{\Sigma_1} + \phi_{\Sigma_2} + \phi_{\Sigma_3}.$$



Pour calculer chaque flux, on tient compte de la composante du champ qui est colinéaire à la normale  $\vec{n}$  à la surface considérée. Il s'agit de la composante axiale  $E_z$  pour les bases  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et de la composante radiale  $E_r$  pour l'enveloppe  $\Sigma_3$ .

$$\phi_{\Sigma_1} = \vec{E}_z \cdot \vec{n} dS = -\pi r^2 E_z(z), \quad \phi_{\Sigma_2} = \vec{E}_z \cdot \vec{n} dS = \pi r^2 E_z(z + dz), \quad \phi_{\Sigma_3} = \vec{E}_r \cdot \vec{n} dS = 2\pi r E_r dz :$$

$$\phi = 0 = \phi_{\Sigma_1} + \phi_{\Sigma_2} + \phi_{\Sigma_3} = \pi r^2 [E_z(z + dz) - E_z(z)] + 2\pi r E_r dz, \text{ donc :}$$

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{E_z(z + dz) - E_z(z)}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{dE_z}{dz}.$$

On a en effet reconnu la définition de la dérivée car  $dz$  peut être aussi petit que l'on veut.

c) Avec  $E_z(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$ , il vient  $E_r = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - 2z^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^5}$ .

$E_r = 0$  lorsque  $R^2 - 2z^2 = 0$ , soit  $R = |z|\sqrt{2}$ , c'est-à-dire pour deux positions sur l'axe.

Autour de ces positions, le champ reste uniforme et colinéaire à l'axe (Oz).



# Potentiel et énergie potentielle électrostatiques

## Introduction

À partir de la circulation du champ, on élabore une formule permettant de calculer directement le potentiel électrostatique. Le calcul du travail de la force de Coulomb laisse apparaître la différence de potentiel et montre sa signification physique. On définit alors l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de charges à partir de la fonction potentiel électrostatique.

### Plan du chapitre 3

#### A. Circulation du champ

1. Circulation élémentaire du champ créé par une charge ponctuelle . . . . . 68
2. Circulation macroscopique du champ créé par une charge ponctuelle . . . . . 68
3. Circulation d'un champ quelconque . . . . . 68

#### B. Potentiel électrostatique

1. Potentiel créé par une charge ponctuelle . . . . . 69
2. Potentiel créé par plusieurs charges ponctuelles . . . . . 69
3. Potentiel créé par une distribution linéique de charges . . . . . 69
4. Potentiel créé par une distribution surfacique de charges . . . . . 70
5. Potentiel créé par une distribution volumique de charges . . . . . 70

#### C. Existence et continuité du potentiel

1. Cas des charges ponctuelles . . . . . 70
2. Cas d'une distribution linéique de charges . . . . . 71
3. Cas d'une distribution surfacique de charges . . . . . 71
4. Cas d'une distribution volumique de charges . . . . . 72

#### D. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

1. Lignes de champ et équipotentielles . . . . . 72
2. Exemple de tracé, topographie . . . . . 73

#### E. Énergie potentielle électrostatique . . . . . 74

#### Méthodes

- L'essentiel ; mise en œuvre . . . . . 77

#### Énoncés des exercices . . . . . 82

#### Indications . . . . . 84

#### Solutions des exercices . . . . . 85

## A. Circulation du champ

### A.1. Circulation élémentaire du champ créé par une charge ponctuelle

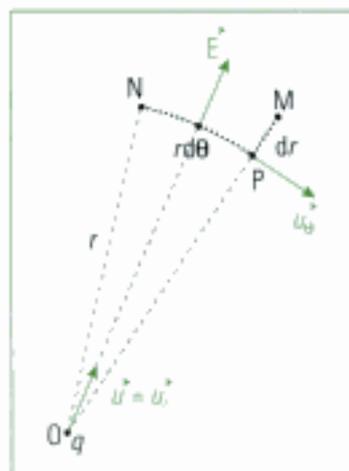


Fig. 1 - Coordonnées polaires.

1. Les trois points O, N et M définissent le plan (Oxy) des coordonnées cartésiennes, et on se place en coordonnées cylindriques dans ce plan, c'est-à-dire en coordonnées polaires.

2. La distance NM est en effet infinitésimale, de sorte que la direction du vecteur unitaire  $\vec{u} = \vec{u}_r$  reste inchangée.

3. En mécanique, le travail d'une force conservative  $\vec{F}$  est la circulation de cette force, il ne dépend pas du chemin suivi. L'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  associée à la force  $\vec{F}$  et définie par la relation  $\vec{F} = -\text{grad}E_p$ , est analogue à celle du potentiel électrostatique.

Soit deux points très voisins N et M. On adopte les coordonnées polaires d'origine O (fig. 1) et le vecteur déplacement élémentaire de N vers M s'écrit :

$$\vec{NM} = \vec{NP} + \vec{PM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta.$$

Le champ  $\vec{E}$  en N ou M est créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en O. Entre N et M, on considère le champ comme uniforme :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \text{ avec } ON = OM = r.$$

La circulation élémentaire  $dC$  du champ  $\vec{E}$  est calculée à partir du déplacement infinitésimal depuis N vers M :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{NM} = \vec{E} \cdot (\vec{NP} + \vec{PM}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta),$$

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right).$$

### A.2. Circulation du champ créé par une charge ponctuelle

Soit deux points  $M_1$  et  $M_2$  éloignés. On note  $r_1 = OM_1$  et  $r_2 = OM_2$ . Pour exprimer la circulation  $C$  du champ  $\vec{E}$  entre  $M_1$  et  $M_2$ , on ajoute toutes les circulations élémentaires  $dC$  du champ  $\vec{E}$  :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} dC = \int_{r_1}^{r_2} -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

### A.3. Circulation d'un champ quelconque

Toute distribution de charges, continue ou non, peut être modélisée comme une somme de charges ponctuelles  $q_i$ .

En appliquant le principe de superposition, on voit que la circulation  $C$  du champ créé par une distribution de charges est la somme des circulations  $C_i$  du champ créé par chacune des charges ponctuelles  $q_i$ .

Comme chacune de ces circulations  $C_i$  d'un point  $M_1$  vers un autre point  $M_2$  ne dépend pas du chemin suivi, on en déduit que la circulation totale n'en dépend pas non plus.

#### Définition 1

La circulation du champ ne dépend que des positions des points de départ et d'arrivée, et non du chemin suivi. On dit que le champ est à circulation conservative

## B. Potentiel électrostatique

#### Définition 2

Le champ est à circulation conservative et la fonction potentiel électrostatique  $V$  est définie par :

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad \begin{cases} \vec{E} \text{ champ en } V \cdot m^{-1} \\ V \text{ potentiel en } V \end{cases}$$

Le signe - devant le gradient est purement conventionnel.

**Définition 3**

La circulation C du champ E entre deux points A et B s'écrit :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B - \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B - dV = V(A) - V(B).$$

**B.1. Potentiel créé par une charge ponctuelle**

La circulation C du champ créé par une charge ponctuelle placée en O entre deux points M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> tels que r<sub>1</sub> = OM<sub>1</sub> et r<sub>2</sub> = OM<sub>2</sub> vaut :

$$C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Or  $C = \int_{M_1}^{M_2} - \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} - dV = V(M_1) - V(M_2).$

**Définition 4**

Le potentiel électrostatique V en un point M créé par une charge q placée en O vaut :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

V potentiel en V  
K = cte<sup>3</sup> en V  
r = OM distance en m  
q charge en C

4. Le potentiel V n'étant défini qu'à partir de sa dérivée, il se trouve donc défini à une constante additive près.

L'unité SI du potentiel électrostatique est le volt. En effet, il est homogène à une champ multiplié par une longueur, soit des V · m<sup>-1</sup> × m = V.

**B.2. Potentiel créé par plusieurs charges ponctuelles**

En appliquant le principe de superposition, il vient que le potentiel créé par plusieurs charges ponctuelles vaut la somme des potentiels créés par chacune des charges ponctuelles :

Le potentiel électrostatique V créé en un point M par un ensemble de n charges ponctuelles q<sub>i</sub> placées en O<sub>i</sub> (avec r<sub>i</sub> = O<sub>i</sub>M) vaut :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + K.$$

**B.3. Potentiel créé par une distribution linéique de charges**

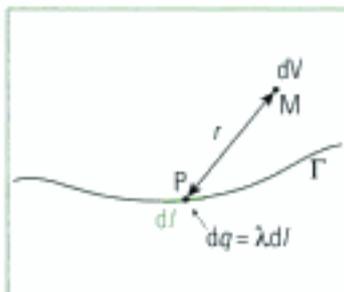


Fig. 2 - Cas d'une distribution linéique de charges.

Les charges sont disposées sur une ligne Γ avec la densité linéique λ (fig. 2). Chaque élément dl de la ligne de centre P est quasi ponctuel et crée un potentiel élémentaire dV en un point M. Le potentiel total en M est la somme (intégrale pour une sommation qui, ici, est continue) de tous les potentiels élémentaires dV créés par les points P de la ligne Γ.

Dans le cas d'une distribution linéique, le potentiel V(M) du champ E créé en un point M s'écrit :

$$V(M) = \int_{\Gamma} dV = \int_{P \in \Gamma} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

où r = PM.

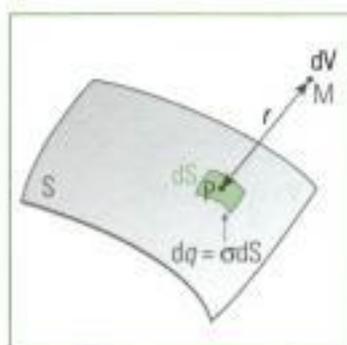


Fig. 3 - Cas d'une distribution surfacique de charges.

## B.4. Potentiel créé par une distribution surfacique de charges

Les charges sont disposées sur une surface  $S$  avec la densité surfacique  $\sigma$  (fig. 3). Chaque élément quasi ponctuel  $dS$  de la surface  $S$  de centre  $P$ , possède une charge  $dq = \sigma dS$  qui crée un potentiel élémentaire  $dV$  en  $M$ . Le potentiel total en  $M$  est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous ces potentiels élémentaires.

Dans le cas d'une distribution surfacique, le potentiel  $V(M)$  du champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  s'écrit :

$$V(M) = \iint_S dV = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

où  $r = PM$ .

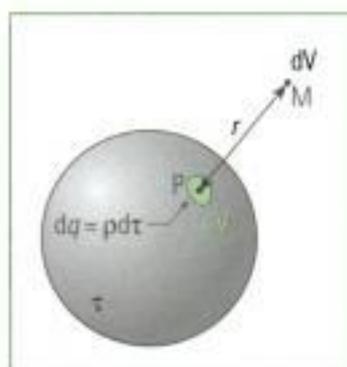


Fig. 4 - Cas d'une distribution volumique de charges.

## B.5. Potentiel créé par une distribution volumique de charges

Les charges sont disposées dans un volume  $\tau$  avec la densité volumique  $\rho$  (fig. 4). Chaque élément quasi ponctuel  $d\tau$  du volume de centre  $P$ , porte la charge  $dq = \rho d\tau$  qui crée un potentiel élémentaire  $dV$  en  $M$ . Le potentiel total en  $M$  est la somme (intégrale pour une sommation continue) de tous ces potentiels élémentaires.

Dans le cas d'une distribution volumique, le potentiel  $V(M)$  du champ  $\vec{E}$  créé en un point  $M$  s'écrit :

$$V(M) = \iiint_{\tau} dV = \iiint_{P \in \tau} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

où  $r = PM$ .

5. Le potentiel n'étant défini que par sa dérivée, on a le choix de la constante additive. On s'arrange généralement pour annuler le potentiel là où le champ s'annule. Lorsque la distribution de charges n'est pas d'extension infinie, le champ s'annule à l'infini et il est cohérent de choisir le potentiel nul à l'infini aussi.

## C. Existence et continuité du potentiel

On s'intéresse au domaine de définition et de continuité du potentiel électrostatique selon la nature de la distribution des charges qui le crée : le potentiel existe-t-il en tout point  $M$  de l'espace et lorsqu'il existe, est-il continu en ce point ?

Lorsqu'il n'y a aucune charge en  $M$ , le potentiel est une fonction des coordonnées de  $M$  définie et continue partout. En revanche, lorsqu'il y a une charge en  $M$ , il existe un point  $P$  de la distribution pour lequel la distance  $PM$  est nulle et ce cas délicat est à étudier.

### C.1. Cas des charges ponctuelles

Le potentiel électrostatique  $V$  créé en un point  $M$  par un ensemble de  $n$  charges ponctuelles  $q_i$  placées en  $O_i$  (avec  $r_i = O_iM$ ) s'écrit :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Lorsque les points  $M$  et  $O_i$  sont confondus,  $r_i \rightarrow 0$  et le potentiel diverge : le potentiel n'est donc pas défini.

#### Propriété 1

Le potentiel électrostatique est défini et continu en tout point sauf aux points où se trouvent les charges ponctuelles.

La notion de charges ponctuelles n'a de sens que si l'observateur se place à une échelle de grandeur très supérieure à la dimension de la charge : celle-ci apparaît alors comme ponctuelle.

### C.2. Cas d'une distribution linéique de charges

Considérons un point M d'une distribution linéique (fig. 5). Le point M se trouve à la distance  $r$  de l'élément  $dl$  centré sur le point P où se trouvent les charges :  $PM = r$ . La distance  $dl$  varie comme la distance  $dr$  ; le potentiel élémentaire  $dV$  créé en M par les charges se trouvant en P varie comme :

$$\frac{dl}{r} = \frac{dr}{r} = d(\ln r).$$

Le potentiel créé en M par les charges se trouvant en P est obtenu en intégrant entre 0 et  $r$ , puis en faisant tendre  $r$  vers zéro, ce qui revient physiquement à amener M en P. On voit alors que le potentiel devient infini lorsque  $r$  s'annule.

#### Propriété 2

Dans le cas d'une distribution linéique de charges, le potentiel n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

La notion de charges linéiques n'a de sens que si « l'épaisseur » de la distribution est très petite devant l'échelle de grandeur de l'observateur.

### C.3. Cas d'une distribution surfacique de charges

Soit un point M d'une distribution surfacique (fig. 6). Le point M se trouve à la distance  $r$  de l'élément de surface  $dS$  centré sur un point P. En utilisant les coordonnées polaires et en prenant pour origine le point M, la surface  $dS$  est une partie de couronne circulaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$  :

$$dS = r dr d\theta.$$

Le potentiel élémentaire  $dV$  créé en M par les charges se trouvant en P varie comme :

$$\frac{dS}{r} = \frac{2\pi r dr}{r}.$$

Comme précédemment, on amène P en M. Il faut alors intégrer entre 0 et  $r$  et faire tendre  $r$  vers zéro. Le potentiel devient nul lorsque  $r$  s'annule : tout se passe comme si aucune charge n'était alors présente en M.

#### Propriété 3

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, le potentiel est défini sur la surface chargée et il est continu à la traversée de la surface<sup>6</sup>.

Ici aussi, la notion de densité surfacique n'a de sens que si l'épaisseur de la densité est infime devant l'échelle d'observation. Dans ce cas, on rappelle que l'on ne cherche pas à calculer le champ là où il y a des charges superficielles.

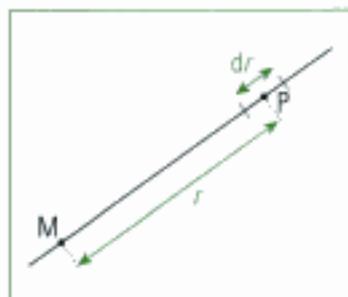


Fig. 5 - Cas d'une distribution linéique de charges.

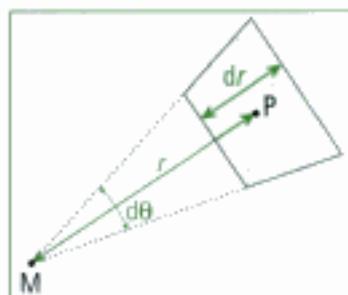


Fig. 6 - Cas d'une distribution surfacique de charges.

6. On voit apparaître ici l'insuffisance du modèle. En effet, comment le potentiel pourrait-il être défini et continu alors que le champ ne l'est pas ? En réalité, les charges sont volumiques et donc le champ reste défini, même si, à l'échelle macroscopique, il semble subir une discontinuité. Sur une distribution surfacique, le champ ne devient pas infini, en fait, car sa valeur représente mathématiquement la pente de la courbe du potentiel. Nous vérifierons cela dans le cadre des exercices où les considérations de symétrie permettront de déterminer la valeur du champ « au milieu » des charges volumiques de la distribution surfacique, bien qu'étant d'épaisseur nulle.

## C.4. Cas d'une distribution volumique de charges

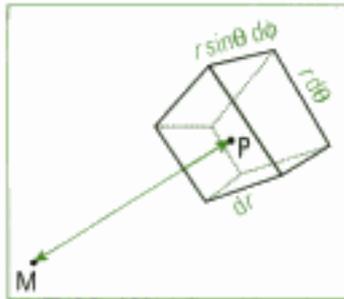


Fig. 7 - Cas d'une distribution volumique de charges.

Soit un point M d'une distribution surfacique (fig. 7). Le point M se trouve à la distance  $r$  d'un élément de volume  $d\tau$  centré sur un point P. L'élément de volume  $d\tau$  est une partie de couronne sphérique d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$  centrée sur M (avec  $PM = r$ ), qui s'exprime en coordonnées sphériques d'origine M par :

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi.$$

Le potentiel élémentaire  $dV$  créé en M par cette couronne varie comme :

$$\frac{d\tau}{r} = \frac{4\pi r^2 dr}{r} = r dr = d\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

Comme précédemment, on amène P en M. On intègre entre 0 et  $r$  et on fait tendre  $r$  vers zéro. Le potentiel devient nul lorsque  $r$  s'annule : tout se passe comme si aucune charge n'était alors présente en M.

### Propriété 4

Lorsque les charges sont volumiques, le potentiel électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace.

## D. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

On peut tracer les lignes de champ et les surfaces équipotentielles dans tout l'espace où ces deux grandeurs restent définies et continues.

### Définition 5

Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points M, le vecteur champ  $\vec{E}$  leur est tangent.

Le long d'une ligne de champ, la valeur du champ  $\vec{E}$  peut varier. Le tracé d'une carte de lignes de champ ne permet donc d'en connaître que la direction en tout point. On oriente chaque ligne de champ par une flèche donnant le sens du champ sur la ligne.

### Définition 6

Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points où la valeur du potentiel électrostatique reste invariante.

Le potentiel étant continu aux points où il est défini, les surfaces équipotentielles sont continues. Comme le potentiel électrostatique en un point dépend des trois coordonnées du point, l'équation  $V = V_0$  de l'équipotentielle  $V_0$  impose une condition sur les trois coordonnées, et deux coordonnées pouvant librement varier et imposer la valeur de la troisième, l'équipotentielle est bien une surface.

### D.1. Lignes de champ et équipotentielles

Soit un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  sur une équipotentielle. Calculons le produit scalaire  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  et, pour cela, revenons à la relation mathématique qui existe entre le champ et le potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V.$$

7. Les lignes de champ peuvent être définies par l'expression analytique de cette propriété, mais une telle étude est hors programme.

En coordonnées cartésiennes, un déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z.$$

D'autre part, le champ  $\vec{E}$  s'écrit, en fonction du potentiel  $V$  :

$$\vec{E} = -\text{grad}V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z\right).$$

Le produit scalaire devient alors<sup>8</sup> :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x} dx\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial y} dy\right) + \left(-\frac{\partial V}{\partial z} dz\right).$$

Si le déplacement  $d\vec{l}$  a lieu le long d'une surface équipotentielle, alors :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV = 0,$$

puisque le potentiel reste constant sur une équipotentielle.

#### Propriété 5

Les lignes de champ sont en tous points orthogonales aux équipotentielles.

La connaissance de l'ensemble des lignes de champ permet donc de tracer les surfaces équipotentielles, de même que la connaissance de l'ensemble des équipotentielles permet de trouver la direction du champ en tout point.

Si le déplacement a lieu le long d'une ligne de champ et dans le sens du champ depuis un point  $M_1$  vers un point  $M_2$ , alors :

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0.$$

Or  $\int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} -dV = V(M_1) - V(M_2)$ , donc  $V(M_1) - V(M_2) > 0$ .

#### Propriété 6

Le long d'une ligne de champ, le champ  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants.

## D.2. Exemple de tracé, topographie

On trace les surfaces équipotentielles et les lignes de champ créées par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  constante (prise positive) et répartie le long d'un fil rectiligne de longueur infinie (se reporter aux applications 1, 2 et 3 du chapitre 2) (fig. 8 et 9).

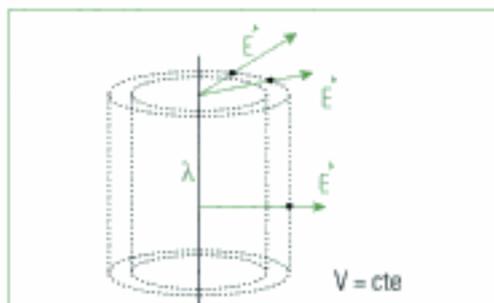


Fig. 8 - Vue de face.

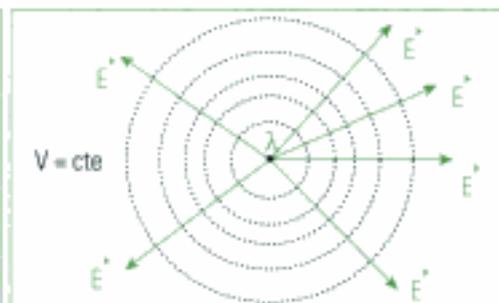


Fig. 9 - Vue de dessus.

<sup>8</sup> On reconnaît en effet l'expression de la différentielle d'une fonction scalaire de trois variables (ici  $x$ ,  $y$  et  $z$ ).

Le champ  $\vec{E}$  s'écrit :  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ .

En coordonnées cylindriques,  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  devient :

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\partial V}{\partial r}, E_\theta = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le potentiel ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $z$  (comme le champ) et l'intégration de la première équation donne :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + K.$$

Les lignes de champ sont donc des droites radiales et les équipotentielles sont des cylindres, car  $V$  constant impose  $r$  constant, qui définit un cylindre dans le système de coordonnées cylindriques.

On remarque que les lignes de champ et les équipotentielles vérifient les considérations de symétrie développées dans l'application 2 du chapitre 2, puisqu'elles restent invariantes par les symétries planes.

## E. Énergie potentielle électrostatique

Afin de mettre en évidence la notion d'énergie potentielle électrostatique, on étudie le travail de la force électrostatique qui s'exerce sur une charge ponctuelle lors de son déplacement dans un champ extérieur, c'est-à-dire créé par d'autres charges que celle dont on étudie le déplacement.

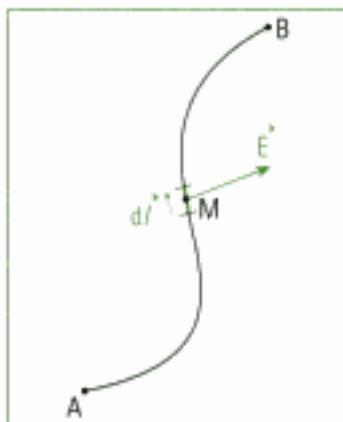


Fig. 10 - Le champ  $\vec{E}$  est uniforme sur un déplacement infinitésimal.

9. Un déplacement spontané de la charge  $q$  est tel que le travail est positif (alors moteur). En supposant  $q > 0$ ,  $\vec{F}$  a le même sens que  $\vec{E}$  et le déplacement a lieu si  $V_A > V_B$  : on retrouve le fait que le champ est dirigé vers les potentiels décroissants.

10. L'analogie avec la mécanique est flagrante et cette énergie potentielle électrostatique est obtenue de la même façon que l'énergie potentielle en mécanique. Cette énergie n'étant définie qu'à partir de sa dérivée, elle n'est définie qu'à une constante additive près.

### E.1. Travail de la force de Coulomb

On suppose qu'une charge ponctuelle  $q$  effectue un déplacement d'un point A à un point B en étant plongée dans un champ  $\vec{E}$  non nécessairement uniforme.

Dans un déplacement  $d\vec{l}$  infinitésimal (fig. 10), le champ extérieur  $\vec{E}$  reste uniforme et le travail élémentaire  $dW$  de la force de Coulomb subie par la charge  $q$  vaut :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Or  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ , donc  $dW = -q \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -\vec{\text{grad}}(qV) \cdot d\vec{l}$ .

Le travail de la force de Coulomb dans le déplacement de la charge  $q$  de A à B est la somme des travaux élémentaires lors des trajets  $d\vec{l}$  constituant le parcours de A vers B :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B -\vec{\text{grad}}(qV) \cdot d\vec{l} = [-qV]_A^B = q(V_A - V_B).$$

#### Loi 1

La force de Coulomb  $\vec{F}$  est donc conservative et son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Elle dérive d'une énergie potentielle  $E_p = qV + K$ , où  $K$  est une constante et l'on écrit<sup>10</sup> :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p) = -\vec{\text{grad}}(qV + K)$$

$\vec{F}$	force en N
$E_p$	énergie potentielle en J
$q$	charge en C
$V$	potentiel en V

## E.2. Énergie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles

Lorsque des charges ponctuelles  $q_i$  se trouvent à proximité les unes des autres dans le cas d'une distribution, chacune d'elles est plongée dans le champ des autres. Les forces de Coulomb exercées réciproquement par ces charges ont travaillé lors du rapprochement de ces charges. On introduit donc le concept d'énergie potentielle d'interaction à partir du travail de la force de Coulomb.

### E.2.1 – Expression de l'énergie potentielle de chaque charge ponctuelle

On suppose que deux charges  $q_1$  et  $q_2$  se trouvent en deux points  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $M_1M_2 = r_{12}$ .

La charge  $q_1$  est alors soumise au champ  $\vec{E}_2$  créé par l'autre charge  $q_2$ . Elle possède donc l'énergie potentielle  $E_{p1} = q_1V_2$ , où  $V_2$  désigne le potentiel du champ  $\vec{E}_2$ <sup>11</sup> :

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

L'énergie potentielle de la charge  $q_1$  s'écrit alors :  $E_{p1} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ .

La symétrie de la formule par rapport aux indices 1 et 2 montre que l'énergie potentielle de la charge  $q_2$  soumise au champ  $\vec{E}_1$  créé par la charge  $q_1$  a la même expression.

#### Définition 7

L'énergie potentielle de chacune des deux charges soumise au champ de l'autre est la même<sup>12</sup> :

$$E_{p1} = E_{p2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + K$$

$E_{pi}$  énergie potentielle en J  
 $q_i$  charges en C  
 $r_{12}$  distance en m.

### E.2.2 – Travail et énergie potentielle d'interaction de deux charges

Les deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , placées respectivement aux points voisins  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $M_1M_2 = r_{12}$  possèdent chacune une énergie potentielle définie dans le paragraphe précédent. La définition suivante donne à cette énergie la signification d'une énergie potentielle d'interaction.

#### Définition 8

L'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  d'une distribution de charges est égale au travail fourni par l'opérateur pour amener ces charges depuis des positions infiniment éloignées les unes des autres jusqu'à des positions proches<sup>13</sup>.

En effet, dans leur position initiale, les charges n'exercent aucune force les unes sur les autres car elles sont trop éloignées.

Considérons les deux charges  $q_1$  et  $q_2$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial (les deux charges sont au repos, sans vitesse, et infiniment éloignées) et l'état final (les deux charges sont placées en  $M_1$  et  $M_2$  et sont au repos, sans vitesse).

On suppose que la charge  $q_1$  placée en  $M_1$  est fixe et que la charge  $q_2$  se rapproche jusqu'à  $M_2$  depuis une position infiniment éloignée.

11. On annule les constantes additives de l'énergie potentielle et du potentiel. La traduction physique est que lorsque les deux charges sont infiniment éloignées, le potentiel et l'énergie potentielle s'annulent. Cela est cohérent avec l'annulation de la force qu'exerce  $q_2$  sur  $q_1$ , donc avec la disparition de l'interaction.

12. Lorsque la constante additive  $K$  est nulle, l'énergie potentielle de chacune des charges devient nulle lorsque ces charges sont infiniment éloignées. La force exercée par une charge sur l'autre s'annule alors, ce qui est physiquement cohérent avec une énergie potentielle nulle.

13. Cette énergie peut aussi être calculée à partir du champ qu'elle crée, mais cela fait partie du cours de seconde année.

Les énergies cinétiques initiale et finale sont nulles. Les forces qui agissent sont la force exercée par l'opérateur et la force de Coulomb. La charge  $q_1$  restant fixe, aucun travail n'est effectué pour cette charge.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = 0 = W_{op} + W_c.$$

$W_{op}$  est le travail que l'opérateur effectue lorsqu'il rapproche la charge  $q_2$ ,  $W_c$  est le travail de la force de Coulomb que la charge  $q_1$  exerce sur  $q_2$ .

On déduit :

$$W_{op} = -W_c = - \int_1^f q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_1^f q_2 \vec{\text{grad}}V_1 \cdot d\vec{l} = q_2 [V_1]_1^f = q_2 (V_{1f} - \underbrace{V_{1i}}_0),$$

$$W_{op} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = E_{p1} = E_{p2}.$$

L'énergie potentielle d'interaction  $E_p$  entre deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  est égale à l'énergie potentielle électrostatique que chacune d'elles possède lorsqu'elle est soumise au champ créé par l'autre charge<sup>14</sup> :

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = E_{p1} = E_{p2}^{14}.$$

14. Lorsque l'on éloigne infiniment les charges, il faut donc fournir un travail opposé à l'énergie potentielle de la distribution. Chacune des charges perd son énergie potentielle électrostatique, mais cette perte n'est pas cumulative : le travail de l'opérateur dans cet éloignement n'est pas lié à la somme des deux énergies. Il s'agit donc bien d'une énergie mutuelle d'interaction entre les deux charges.

# L'essentiel

## ✓ Champ, potentiel et circulation électrostatiques

Le champ  $\vec{E}$  est à circulation conservative, c'est-à-dire que sa circulation entre deux points ne dépend pas du chemin suivi pour aller d'un point à l'autre.

Le champ  $\vec{E}$  dérive donc d'un potentiel  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V.$$

Sa circulation  $C$  vaut alors :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B -dV = V(A) - V(B).$$

## ✓ Expression et définition du potentiel

### \* Cas d'une charge ponctuelle

Le potentiel en un point  $M$  du champ  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  s'écrit :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K, \text{ où } K \text{ est une constante et } r = OM.$$

Le potentiel n'est pas défini sur des charges ponctuelles.

### \* Cas d'une distribution linéique de charges

Le potentiel en un point  $M$  du champ  $\vec{E}$  créé par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  se trouvant sur une ligne  $\Gamma$  :

$$V(M) = \int_{\Gamma} dV = \int_{P \in \Gamma} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} + K, \text{ où } r = PM.$$

Le potentiel n'est pas défini sur les charges linéiques.

### \* Cas d'une distribution surfacique de charges

Le potentiel en un point  $M$  du champ  $\vec{E}$  créé par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  se trouvant une surface  $S$  :

$$V(M) = \iint_S dV = \iint_{P \in S} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} + K, \text{ où } r = PM.$$

Le potentiel est défini et continu en tout point de l'espace pour des charges surfaciques.

### \* Cas d'une distribution volumique de charges

Le potentiel en un point  $M$  du champ  $\vec{E}$  créé par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  se trouvant dans un volume  $V$  :

$$V(M) = \iiint_V dV = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \iiint_{P \in V} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} + K, \text{ où } r = PM.$$

Le potentiel est défini et continu en tout point de l'espace pour des charges volumiques.

## ✓ Lignes de champ et équipotentielles

\* Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points  $M$ , le vecteur champ  $\vec{E}$  leur est tangent. Le long d'une ligne de champ, le champ  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants.

\* Les équipotentielles sont les surfaces données par  $V = \text{constante}$ .

Les équipotentielles sont perpendiculaires en tout point aux lignes de champ.

## ✓ Énergie potentielle

- Énergie potentielle d'une charge ponctuelle  $q$  plongée dans un champ  $\vec{E}$  :

$$E_p = qV + K,$$

où  $V$  est le potentiel électrostatique du champ  $\vec{E}$  et  $K$  une constante.

- Énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , placées en  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $M_1M_2 = r_{12}$  :

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + K.$$

- L'énergie potentielle d'interaction est le travail fourni par un opérateur pour amener les charges depuis des positions où elles sont infiniment éloignées et n'interagissent pas (pas de force de Coulomb entre les charges), jusqu'à des positions de voisinage où chaque charge est soumise aux champs créés par les autres charges (ici, une seule autre charge).

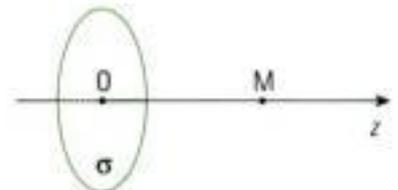
# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment déterminer un potentiel électrostatique ?

Soit un disque, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , ayant une distribution surfacique uniforme de charges de densité  $\sigma$  constante et positive.

On veut déterminer le potentiel électrostatique en tout point  $M$  de son axe de révolution.



### → Savoir faire

- 1 Si l'expression du champ  $\vec{E}$  est connue, utiliser la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  pour obtenir le potentiel. Il faut alors calculer une ou plusieurs primitives (si  $\vec{E}$  a plusieurs expressions), puis appliquer les conditions de continuité du potentiel pour ne garder qu'une seule constante.
- 2 Si l'expression du champ  $\vec{E}$  n'est pas connue, alors effectuer les considérations de symétrie et d'invariances. Le champ étant la dérivée du potentiel, ces deux grandeurs sont indépendantes des mêmes variables.
- 3 Voir si le champ peut être calculé en utilisant le théorème de Gauss. Si cela est possible, alors calculer le champ et en déduire le potentiel (étape 1), sinon passer à l'étape 4.
- 4 Utiliser l'intégrale permettant de calculer directement le potentiel  $V$  à partir des charges et faire le calcul.



La méthode directe est plus rapide que les deux étapes du calcul du champ, puis de son intégration. Mais cela reste une configuration rare.

### → Application 1

Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  en tout point  $M$  d'un axe de révolution d'un disque, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , ayant une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  constante et positive.

## Solution

❶ Supposons que le champ  $\vec{E}$  a déjà été calculé selon la méthode n° 2 du chapitre 2. On avait :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z.$$

Ce champ n'a qu'une composante (sur  $(Oz)$ ) :  $\vec{E} = E \vec{u}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$ ,

car  $z$  est la seule variable dont dépend le champ  $\vec{E}$ , donc aussi le potentiel  $V$ .

Il reste donc à calculer  $V(z) = -\int E(z) dz$  en distinguant les deux cas  $z < 0$  et  $z > 0$ .

$$V(z > 0) = -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -z + \int \frac{z dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

$$V(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -z + \frac{1}{2} \int \frac{d(R^2 + z^2)}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) + K.$$

On trouve de même, pour l'autre domaine ( $z < 0$ ) :

$$V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( z + \sqrt{R^2 + z^2} \right) + K', \quad \text{où } K' \text{ est une autre constante.}$$

Le potentiel étant continu pour  $z = 0$ , on écrit  $V(z = 0^+) = V(z = 0^-)$ , ce qui donne ici  $K = K'$ .

❷ Si l'expression du champ  $\vec{E}$  n'est pas connue, on opère les considérations de symétrie et d'invariances comme dans l'application 2 de la méthode n° 2 du chapitre 2 :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z, \quad \text{et par suite il vient : } V = V(z).$$

❸ On a vu que le théorème de Gauss ne donne rien pour cette distribution.

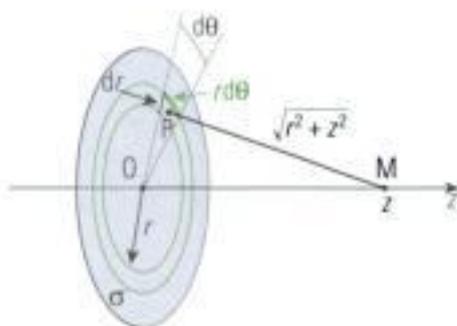
❹ Le potentiel est créé par une distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} + K = \iint_{P \in S} \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} + K,$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \times \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta + K,$$

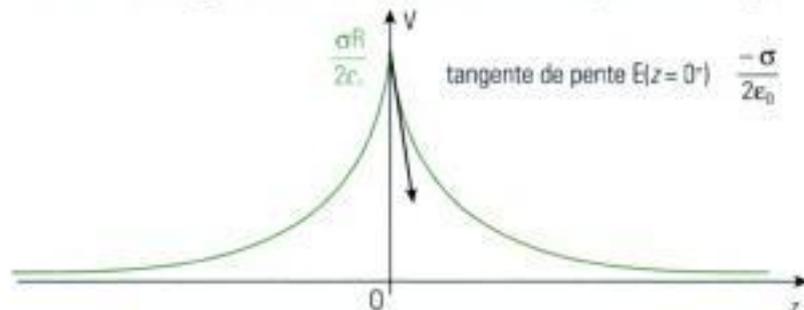
$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{d(r^2 + z^2)}{2\sqrt{r^2 + z^2}} + K,$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r^2 + z^2} \Big|_0^R + K \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) + K.$$



Cette fonction est bien continue lorsque  $z = 0$  et la constante  $K$  dépend du choix de l'opérateur.

La voici tracée ici avec  $K = 0$  : le potentiel devient nul à l'infini, là où le disque crée un champ nul.



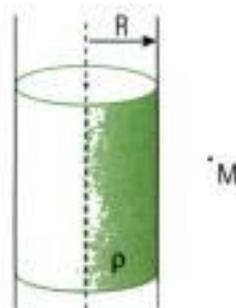
On retrouve la discontinuité du champ  $\vec{E}$  en  $z = 0$ , car sa valeur est l'opposée de la pente de la courbe du potentiel. Le point anguleux de la fonction  $V(z)$  en  $z = 0$  montre que la fonction  $E(z)$  est discontinue en  $z = 0$ .

On remarque que dans ce cas, le calcul direct du potentiel a été plus rapide que le calcul de la primitive du champ électrique. Cela est très rare et ici causé par la présence d'une valeur absolue dans l'expression du champ.

### → Application 2

Soit un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur infinie.

Déterminer le potentiel créé par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  uniforme répartie dans le cylindre.



### Solution

①, ② et ③ Le champ a été déterminé dans l'exercice 1 du chapitre 2 en utilisant le théorème de Gauss. Dans un système de coordonnées cylindriques, on a trouvé :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r, \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r, \quad \vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r.$$

Le potentiel est déterminé par la relation  $\vec{E} = -\text{grad}V$  qui donne ici :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}$ ,

car  $r$  est la seule variable (trouvé grâce aux invariances). On a donc :

$$V(r \geq R) = \int -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr + K \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \int -\frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr + K'.$$

Les constantes  $K$  et  $K'$  sont *a priori* différentes, car sur chacun des domaines, le champ a une expression mathématique différente. Il vient :

$$V(r \geq R) = \frac{-\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + K \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \frac{-\rho}{4\epsilon_0} r^2 + K'.$$

La relation entre les constantes est trouvée en écrivant que le potentiel doit être continu en  $r = R$  :

$$V(r = R^+) = V(r = R^-), \quad \text{soit} \quad \frac{-\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + K = \frac{-\rho}{4\epsilon_0} R^2 + K'.$$

Si l'on garde  $K'$ , alors  $K = \frac{-\rho}{4\epsilon_0} R^2 + K' + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$ , et donc :

$$V(r \leq R) = \frac{-\rho}{4\epsilon_0} r^2 + K',$$

$$V(r \geq R) = \frac{-\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + \frac{-\rho}{4\epsilon_0} R^2 + K' + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 + K'$$

④ Le calcul direct du potentiel s'obtient en écrivant :

$$V(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM} + K.$$

$P$  est un point quelconque du volume. En prenant l'origine  $O$  du repère cylindrique sur le projeté orthogonal de  $M$  et l'axe  $(Ox)$  confondu avec la droite  $(OM)$ , on simplifie au maximum le calcul.

Le point  $P$  est repéré par sa distance  $r'$  à l'axe, l'angle  $\theta$  et sa cote  $z$ .

On a  $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -r' \cos\theta \vec{u}_x - r' \sin\theta \vec{u}_y - z \vec{u}_z + r \vec{u}_x$ , d'où :

$$PM = \sqrt{(r - r' \cos\theta)^2 + (r' \sin\theta)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta + z^2}.$$

Le potentiel est donné par le calcul de l'intégrale triple :

$$V(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho r' dr' d\theta dz}{4\pi\epsilon_0 r^2 + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta + z^2}} + K.$$

Cette intégrale étant absolument incalculable à la main, on confirme sur cet exemple que pour des problèmes à « haute » symétrie, il est plus intéressant de calculer d'abord le champ électrostatique en utilisant le théorème de Gauss, puis le potentiel en cherchant la primitive du champ.

Lorsque la distribution est surfacique ou volumique, l'intégrale du calcul direct est le plus souvent impossible ou extrêmement difficile à calculer. La distribution surfacique de l'application 1 constitue l'un des rares contre-exemples.

## Méthode n° 2

### Comment déterminer l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de charges ?

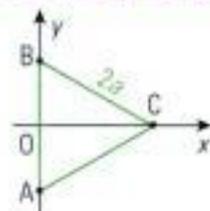
On cherche à déterminer l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de trois charges ponctuelles identiques  $q$  formant un triangle équilatéral.

#### → Savoir faire

- ❶ Chercher la meilleure façon de construire la distribution, c'est-à-dire fixer une charge  $q_1$  en un point choisi puis amener successivement les autres charges  $q_i$  depuis l'infini vers les positions finales et voisines de celle de la charge  $q_1$ , où il sera possible de calculer les potentiels.
- ❷ Calculer le travail  $q_i V$  effectué par l'opérateur pour amener chaque charge de l'infini jusqu'à sa position finale, où  $V$  désigne le potentiel à la position finale de la charge.

#### → Application

Déterminer l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de trois charges identiques  $q$  présentes aux sommets A, B et C d'un triangle équilatéral de côté  $2a$ .



#### Solution

❶ Ici, le choix est particulièrement simple. On fixe la charge en A. On approche la charge suivante pour la placer en B. Enfin, on amène la dernière charge pour la placer en C.

❷ La seconde charge subit l'action du champ créé par la première. Le potentiel créé au point B par la charge  $q$  placée en A vaut :

$$V_A(B) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

L'opérateur doit fournir un travail :

$$W = qV_A(B) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Approchons la troisième charge jusqu'en C. Celle-ci est plongée dans le potentiel électrostatique des deux autres charges placées en A et B. Le potentiel créé en C par les deux charges présentes en A et B est la somme des potentiels créés par chacune d'elles :

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Le travail que l'opérateur doit accomplir pour rapprocher cette dernière charge jusqu'en C vaut :

$$W' = qV(C) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

L'énergie potentielle électrostatique d'interaction  $E_p$  de ce système de trois charges est égale à la somme des travaux effectués par l'opérateur :

$$E_p = W + W' = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Le cas de l'énergie d'une distribution continue de charges est hors programme. Le cas échéant, son calcul n'apparaîtrait que dans un problème où des questions successives découperaient la difficulté en montrant la marche à suivre.

# Exercices

## Données mathématiques

On rappelle ici l'expression de l'opérateur gradient d'analyse vectorielle, très fréquemment utilisé dans les exercices, dans les trois systèmes de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

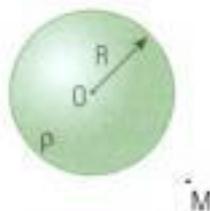
Coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

## Niveau 1

### Ex. 1 Sphère remplie

On considère une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  ayant une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  uniforme.



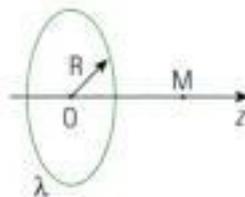
1) Préciser le domaine de définition du potentiel électrostatique  $V$  créé par cette distribution, puis déterminer son expression.

On prendra le potentiel nul à l'infini.

2) Tracer la courbe visualisant les variations de  $V$ . Commenter.

### Ex. 2 Cercle chargé

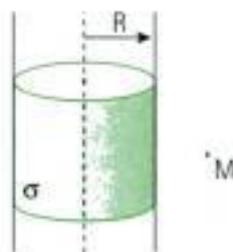
Soit un cercle d'axe  $(Oz)$ , de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Cette circonférence porte une densité de charges linéiques  $\lambda$  uniforme. Déterminer le potentiel  $V$  en tout point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ .



On prendra le potentiel nul à l'infini.

### Ex. 3 Surface cylindrique

On considère un cylindre, à base circulaire de rayon  $R$  et de hauteur infinie, portant une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  uniforme.



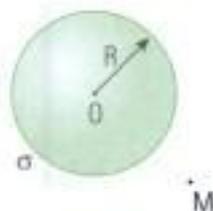
1) Calculer le potentiel électrostatique  $V$  créé par cette distribution en tout

point où il est défini (on précisera le domaine de définition). On prendra le potentiel nul sur l'axe du cylindre.

2) Tracer la courbe des variations du potentiel en fonction de la position du point  $M$ . Commenter.

### Ex. 4 Surface sphérique

On considère une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , ayant une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  uniforme.



1) Calculer le potentiel électrostatique  $V$  créé par cette distribution en tout point  $M$  où il est défini (domaine à préciser).

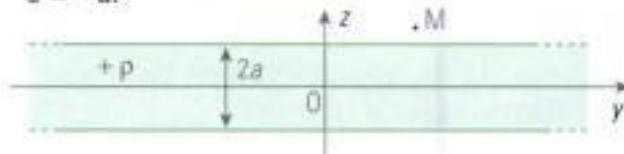
On prendra le potentiel nul à l'infini.

2) Tracer la courbe des variations du potentiel en fonction de la position du point  $M$ . Commenter.

## Niveau 2

### Ex. 5 Couche plane épaisse

On s'intéresse au champ électrostatique créé par la distribution volumique de charges de densité  $+\rho$  uniforme et positive, comprise entre les cotes  $z = +a$  et  $z = -a$ .



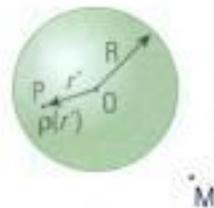
1) Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  en tout point  $M$  où il est défini. On prendra le potentiel nul au point  $O$ .

2) Tracer la courbe des variations du potentiel en fonction de la position du point  $M$ . Commenter.

### Ex. 6 À l'intérieur d'une sphère

On considère une distribution volumique continue de charges situées à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Celle-ci est chargée avec la densité volumique  $\rho$  non uniforme, dont la valeur dépend de la distance  $r'$  au centre de la sphère :

$$\rho(r') = \rho_0 \left( 1 - \frac{r'^2}{R^2} \right)$$



1) Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  que crée la distribution de charges en tout point  $M$  de l'espace où il est défini.

On prendra le potentiel nul à l'infini.

2) Tracer la courbe des variations du potentiel  $V(M)$ . Que vaut le potentiel en  $O$ ? Commenter.

### Ex. 7 Charges formant un carré

Calculer l'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de quatre charges identiques disposées aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'un carré de côté  $2a$ . On prendra le potentiel nul à l'infini.



## Niveau 3

### Ex. 8 Modélisation d'un atome

On représente un atome d'une manière approchée par un noyau central sphérique de rayon  $a$  et de centre  $O$ , contenant  $Z$  protons, chacun possédant une charge  $+e$ , avec une densité uniforme et par un cortège électronique supposé indélimité dont la densité volumique de charges en un point  $M$  de l'espace ( $OM = r$ , et  $r > a$ ) est  $\rho(r) = Ar^{-n}$ ,  $n$  et  $A$  étant des constantes. Naturellement, l'atome est supposé électriquement neutre.

1) Calculer, en fonction de  $A$  et  $n$ , la charge  $q$  du cortège électronique, puis montrer que  $n$  est nécessairement supérieur à trois.

2) Déterminer la constante  $A$  en fonction de  $a$ ,  $Z$ ,  $e$  et  $n$ .

3) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  à l'intérieur du cortège électronique ( $r > a$ ).

4) Calculer le potentiel électrostatique  $V$  pour  $r > a$ , en le prenant nul à l'infini.

5) La théorie montre qu'à l'intérieur du cortège électronique,  $V(r)$  et  $\rho(r)$  sont liés par la relation :

$$\rho = K V^{3/2},$$

$K$  étant une constante. En déduire  $n$  et la loi  $V(r)$ .

### Ex. 9 Un fil infini

Un fil rectiligne, infini, de dimensions transversales négligeables, porte une densité de charges linéique uniforme  $\lambda > 0$ . Le fil est parallèle à l'axe  $(Oz)$  et coupe le plan  $(xOy)$  en  $F(a; 0; 0)$ .

1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$  en un point  $M$  du plan  $(xOy)$ , en introduisant la variable  $r = FM$ .

2) Exprimer le potentiel  $V_0$  en  $O$ , puis  $V - V_0$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r$  et  $a$ , sans faire intervenir de constante supplémentaire.

3) On place maintenant (et jusqu'à la fin de cet exercice) un second fil, portant la densité linéique  $-\lambda$ , parallèle au premier fil, et coupant le plan  $(xOy)$  en  $F'(-a; 0; 0)$ .  $M$  étant un point quelconque du plan  $(xOy)$ , calculer le potentiel  $V$  en  $M$ , créé par l'ensemble des deux fils, puis exprimer le potentiel  $V_0$  en  $O$ , et enfin  $V - V_0$  en fonction de  $\lambda$ ,  $FM = r$ ,  $F'M = r'$ , sans constante supplémentaire.

4) Déterminer la valeur de  $V_0$  pour que  $V$  tende vers zéro lorsque le point  $M$  s'éloigne indéfiniment dans le plan  $(xOy)$ . On gardera cette valeur dans la suite.

5) On pose  $\alpha = \frac{2\pi\epsilon_0}{\lambda}$ .

Montrer que les surfaces équipotentielles sont définies par une relation  $\frac{r'}{r} = k$ .

Calculer  $k$  en fonction de  $\alpha$  et du potentiel  $V$ .

6) Quelle est l'équipotentielle  $V = 0$ ?

7) Montrer que les lignes équipotentielles dans le plan  $(xOy)$  sont des cercles centrés sur la droite  $(FF')$ . Déterminer le centre et le rayon d'une équipotentielle, en fonction de  $a$  et de  $k$ .

*Donnée* : on rappelle, dans un plan  $(Oxy)$ , l'équation en coordonnées cartésiennes que vérifient les coordonnées d'un point  $M$  du cercle de centre  $C(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

### Ex.10 Surface cylindrique

1) On considère une surface cylindrique circulaire de rayon  $R$  et de longueur infinie, d'axe  $(Oz)$ , portant sur sa surface une densité de charge uniforme  $\sigma > 0$ .

a) Donner la direction et le sens du champ électrostatique en tout point  $M$  de l'espace, défini par sa distance  $HM = r$ ,  $H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(Oz)$ .

b) Calculer la valeur  $E$  du champ en tout point  $M$ .

c) Calculer le potentiel  $V$  en tout point  $M$  de l'espace. On posera  $V(R) = V_0$ .

2) On considère alors quatre cylindres identiques de rayon  $R$ , d'axes parallèles à  $(Oz)$  et coupant le plan  $(xOy)$  aux points de coordonnées  $(0; D)$ ,  $(0; -D)$ ,  $(D; 0)$  et  $(-D; 0)$  dans ce plan. Ces cylindres sont des conducteurs parfaits, pour lesquels on admet que les charges sont réparties uniformément sur la surface. On admet que la charge qu'ils portent est proportionnelle à leur potentiel. Les deux premiers sont portés au potentiel  $V_0$ , les deux autres au potentiel  $-V_0$ . On supposera  $R \ll D$ , de sorte que l'on peut considérer la superposition de dispositifs identiques à celui étudié dans la question 1, et le potentiel nul en  $O$ . On considérera un point  $M(x, y, z)$  de l'espace.

a) Le potentiel  $V(M)$  dépend-il de  $z$ ?

b) Déterminer le champ  $E$  au point  $O$ .

c) Représenter le plan  $(xOy)$ , où figureront les projections des quatre cylindres, ainsi que les quatre

points  $\alpha(D; D)$ ,  $\beta(-D; D)$ ,  $\gamma(-D; -D)$ ,  $\delta(D; -D)$  en chacun desquels on dessinera le champ électrostatique (direction et sens) par une flèche, en justifiant. Que peut-on dire des équipotentielles en chacun de ces points ?

d) Au voisinage de O, dans le plan  $(xOy)$ , le potentiel  $V$  admet une expression de la forme :

$V(x, y, z) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ , (développement limité où l'on a négligé les termes d'ordre trois). En utilisant des considérations géométriques, déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $f$ , puis une relation entre  $d$  et  $e$ .

e) Quelle est, au voisinage de O, la nature des équipotentielles ? Vérifier la nature de l'équipotentielle  $V = 0$ . Tracer sur une figure lisible une famille d'équipotentielles dans le plan  $(xOy)$ , au voisinage de O.

### Ex. 11 Symétrie sphérique

Une distribution volumique de charges est à symétrie sphérique de centre O, avec une densité  $\rho(r)$ , où  $r$  désigne la distance au point O. La densité  $\rho$  n'est non nulle qu'entre  $r = \frac{R}{2}$  et  $r = R$ , elle est nulle ailleurs et la charge totale de la distribution est  $Q$ . Le potentiel électrostatique créé par cette distribution vaut :

$$V(r) = Kr(R - r) + K'$$

dans l'intervalle  $\left[\frac{R}{2}; R\right]$ .

1) Le potentiel est pris nul à l'infini. Déterminer le champ électrostatique et la loi  $V(r)$  pour  $r > R$ . En déduire la valeur des constantes  $K$  et  $K'$ .

2) Calculer le potentiel électrostatique en O. Conclure.

### Ex. 12 Énergie potentielle d'une sphère

Une sphère de rayon  $R$  est uniformément chargée en volume avec une charge volumique  $\rho$ . On se propose de déterminer son énergie potentielle électrostatique. Pour cela, on se propose de la construire « couche après couche », c'est-à-dire en amenant successivement des charges telles que son rayon passe successivement de la valeur  $r$  à  $r + dr$ .

1) Soit une sphère de rayon  $R$  chargée en volume avec la densité  $\rho$ . Calculer la valeur du potentiel électrostatique  $V$  à sa surface ( $r = R$ ), en prenant le potentiel nul à l'infini.

2) Exprimer en fonction de  $\rho$ ,  $r$  et  $dr$  la charge  $dq$  qui, déposée sur la sphère de rayon  $r$ , fait augmenter son rayon de  $dr$ .

3) Quel travail élémentaire  $dW$  a dépensé l'opérateur pour déposer cette couche sur la sphère ?

4) En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de la sphère en fonction de  $\rho$  et  $R$ .

## Indications

### Ex. 1 à Ex. 6

Appliquer la méthode n° 1 et choisir entre calcul direct du potentiel ou calcul préalable du champ.

### Ex. 7

Amener successivement les charges aux points voulus.

### Ex. 8

- 1) Intégrer sur le volume chargé négativement.
- 2) L'atome est neutre !
- 3) Penser au théorème de Gauss.

### Ex. 9

Appliquer le principe de superposition.

### Ex. 10

Appliquer abondamment les considérations de symétrie du champ  $E$ .

### Ex. 11

Appliquer les conditions de continuité.

### Ex. 12

Le travail de l'opérateur est égal à l'énergie potentielle d'interaction.

# Solutions des exercices

## Exercice 1

1) La distribution de charges étant volumique, le potentiel électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace.

On se place dans le cadre de la méthode n° 1.

Les considérations de symétrie et d'invariance ont déjà été effectuées pour ce dispositif dans l'exercice 2 du chapitre 2. Le problème était « à haute symétrie » et le champ électrostatique peut être calculé en utilisant le théorème de Gauss. On utilisera donc ce résultat pour en déduire l'expression du potentiel.

Le champ  $\vec{E}$  s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } \vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

À partir de la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  et de l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi,$$

il vient par identification :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \text{ et } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Le potentiel  $V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$  (propriété déjà établie depuis la constatation des invariances par rotation). On résout la dernière équation dans chacun des deux domaines :

- Pour  $r < R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ , soit  $V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K$ .

- Pour  $r > R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ , soit  $V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + K'$ .

Le potentiel étant une primitive du champ, chaque domaine fait apparaître une constante dans l'expression du potentiel. Les deux constantes sont déterminées en utilisant les conditions de continuité (ici une seule condition pour  $r = R$ ) et la valeur de  $V$  choisie arbitrairement, car  $V$  est défini à une constante additive près (ici  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ ).

Le potentiel est continu partout, donc en  $r = R$  :

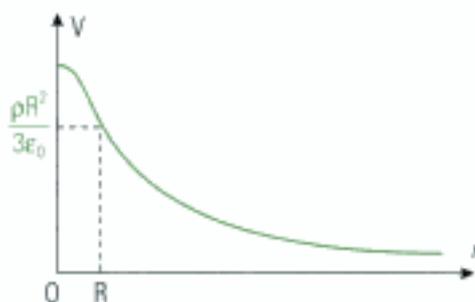
$$V(R) = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} + K', \text{ soit } K = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} + K'.$$

On sait que  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  :

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + K' \xrightarrow{r \rightarrow \infty} K', \text{ donc } K' = 0 \text{ et } K = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$$

$$\text{Finalement : } V(r < R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2), \quad V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}.$$

2) Le tracé de la courbe est obtenu sur la figure ci-contre. On remarque la continuité du potentiel et celle de sa dérivée (pas de changement de pente pour  $r = R$ ) qui traduit physiquement la continuité du champ électrostatique.



## Exercice 2

On a vu dans l'exercice 3 du chapitre 2 que le théorème de Gauss ne peut pas être appliqué. Il faut donc procéder au calcul direct du potentiel.

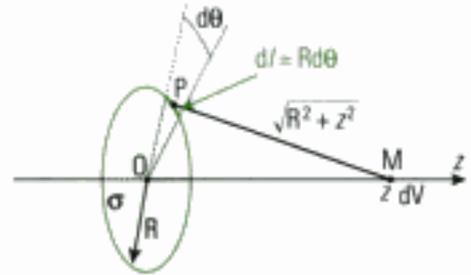
Deux cas sont envisageables :

- on calcule d'abord le champ  $\vec{E}$ , puis on utilise la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  ; cela revient à faire deux calculs d'intégrales, le premier pour calculer  $\vec{E}$ , le second pour en chercher une primitive par  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  ;
- on calcule directement le potentiel sans passer par le calcul du champ à l'aide de l'intégrale :

$$V(M) = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} + K.$$

L'élément de longueur  $dl$  est centré sur le point  $P$  et vaut  $dl = R d\theta$  ; il porte la charge élémentaire :

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta.$$



On intégrera sur  $\theta$  (entre 0 et  $2\pi$ ) pour parcourir le cercle :

$$V(M) = \int_{P \in \text{cercle}} dV = \int_{P \in \text{cercle}} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} + K.$$

Lorsque  $z \rightarrow \infty$ ,  $V(z) \rightarrow K$  et on souhaite que  $V(z) \rightarrow 0$ , donc  $K = 0$ .

Ce calcul est d'autant plus rapide que toutes les charges sont à égale distance de  $M$ . Ainsi, tout se passe comme si la charge totale  $Q = 2\pi R\lambda$  était ponctuelle à la distance  $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$  du point  $M$ .

## Exercice 3

1) La distribution de charges est surfacique : le potentiel est défini et continu en tout point de l'espace, même si le champ subit une discontinuité à la traversée de la surface.

Comme dans l'exercice 5 du chapitre 2, le dispositif est à « haute » symétrie et le champ se calcule facilement en utilisant le théorème de Gauss. On en rappelle les résultats :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

Le potentiel  $V$  est calculé à partir de la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ .

En coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient est :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

$V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $z$  (propriété déjà établie depuis la constatation des invariances par rotation et translation). Il reste la dernière équation à résoudre dans chacun des deux domaines :

- Pour  $r < R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ , soit  $V(r) = K$ .

- Pour  $r > R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$ , soit  $V(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + K'$ .

Le potentiel étant une primitive du champ, chaque domaine fait apparaître une constante dans l'expression du potentiel. Les deux constantes sont déterminées en utilisant les conditions de continuité (ici une seule condition pour  $r = R$ ) et la valeur de  $V$  choisie arbitrairement, car  $V$  est défini à une constante additive près (ici  $V = 0$  lorsque  $r = 0$ ).

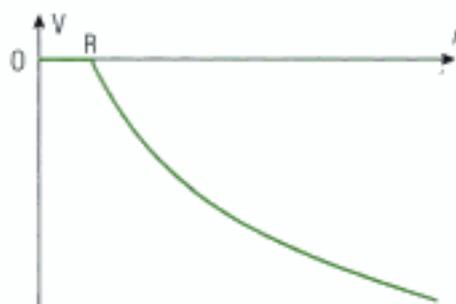
On sait que  $V = 0$  lorsque  $r = 0$  :  $V(0) = K = 0$ , donc  $K = 0$ .

Le potentiel est continu pour  $r = R$  :

$$V(R) = \frac{-\sigma R}{\epsilon_0} \ln R + K' = 0, \text{ soit } K' = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R.$$

$$\text{Finalement : } V(r < R) = 0, V(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}.$$

La courbe montre bien la continuité du potentiel avec la discontinuité du champ car la dérivée du potentiel n'est pas continue (présence d'un point anguleux pour  $r = R$ ).



#### Exercice 4

La distribution est surfacique, donc le potentiel  $V$  est défini et continu en tout point de l'espace, même si le champ subit une discontinuité à la traversée de la surface.

Comme dans l'exercice 4 du chapitre 2, le dispositif est à « haute » symétrie et le champ se calcule facilement avec le théorème de Gauss. Il s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0} \text{ et } \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Le potentiel  $V$  est calculé à partir de  $\vec{E} = -\text{grad}V$  et de l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \text{ et } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

$V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$  (propriété déjà établie depuis la constatation des invariances par rotation). Il reste la dernière équation à résoudre dans chacun des deux domaines :

- Pour  $r < R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ , soit  $V(r) = K$ .

- Pour  $r > R$ , on a :  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$ , soit  $V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + K'$ .

Le potentiel étant une primitive du champ, chaque domaine fait apparaître une constante dans l'expression du potentiel. Les deux constantes sont déterminées en utilisant les conditions de continuité (ici une seule condition pour  $r = R$ ) et la valeur de  $V$  choisie arbitrairement, car  $V$  est défini à une constante additive près (ici  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ ).

Le potentiel est continu partout, donc en  $r = R$  :

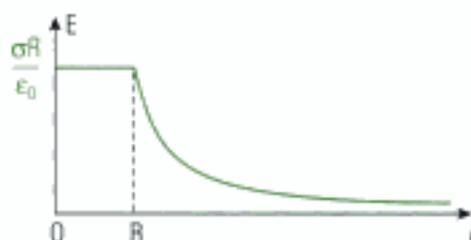
$$V(R) = K = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R} + K', \text{ soit } K = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} + K'.$$

On sait que  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  :

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + K' \xrightarrow{r \rightarrow \infty} K', \text{ donc } K' = 0 \text{ et } K = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Finalement : } V(r < R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}, V(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}.$$

2) On remarque sur le tracé de la courbe ci-contre que la fonction potentiel est bien continue à la traversée de la surface. En revanche, sa dérivée (physiquement la pente de la tangente à la courbe) n'est pas continue pour  $r = R$ . C'est donc la discontinuité du champ électrostatique que l'on visualise ici.



## Exercice 5

1) La distribution de charges est volumique : le potentiel électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace. On se place dans le cadre de la méthode n° 1.

Les considérations de symétrie et d'invariance ont été effectuées pour ce dispositif dans l'exercice 6 du chapitre 2. Le problème était à « haute » symétrie et le champ électrostatique peut être calculé en utilisant le théorème de Gauss. On utilisera donc ce résultat pour en déduire l'expression du potentiel.

Il a été trouvé pour le champ électrostatique, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(z < -a) = \frac{-\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z, \quad \vec{E}(-a < z < a) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z, \quad \vec{E}(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

Le potentiel  $V$  est calculé à partir des relations :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

$V$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$  (propriété que nous constatons mathématiquement mais qui a déjà été établie depuis les deux invariances par translation). Il reste la dernière équation à résoudre dans chacun des trois domaines :

- Pour  $z < -a$ , on a  $E_z(z < -a) = \frac{-\rho a}{\epsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ , soit  $V = \frac{\rho a}{\epsilon_0} z + K$ .

- Pour  $-a < z < a$ , on a  $E_z(-a < z < a) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ , soit  $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + K'$ .

- Pour  $z > a$ , on a  $E_z(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ , soit  $V = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} z + K''$ .

Le potentiel étant une primitive du champ, chaque domaine fait apparaître une constante dans l'expression du potentiel. Les trois constantes sont déterminées en utilisant les conditions de continuité (ici deux conditions pour  $z = -a$  et  $z = a$ ) et la valeur de  $V$  choisie arbitrairement, car  $V$  est défini à une constante additive près (ici  $V = 0$  lorsque  $z = 0$ ).

Commençons par le point où le potentiel est nul :

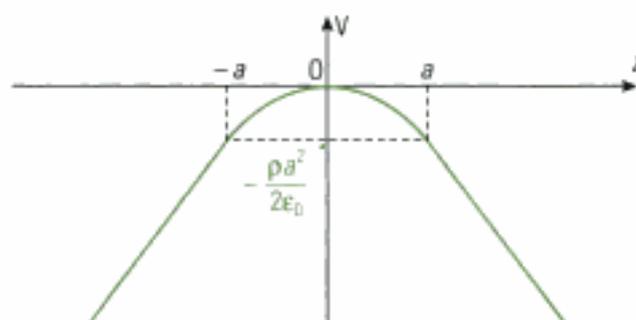
$$V(-a < z < a) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + K', \quad \text{donc} \quad V(z = 0) = K' = 0 \quad \text{et} \quad V(-a < z < a) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2.$$

Par continuité on obtient :

$$V(z = -a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} (-a) + K = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (-a)^2, \quad \text{soit} \quad K = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \quad \text{et} \quad V(z < -a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( z + \frac{a}{2} \right).$$

$$V(z = a) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} (a) + K'' = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2, \quad \text{soit} \quad K'' = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \quad \text{et} \quad V(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( -z + \frac{a}{2} \right).$$

2) La courbe donne les variations du potentiel en fonction de  $z$ . La continuité est assurée par le choix des constantes, mais on remarque aussi l'absence de point anguleux. Un point anguleux traduit mathématiquement une discontinuité de la dérivée de la fonction  $V$ , ce qui correspondrait ici physiquement à la discontinuité du champ. Il est donc normal de ne pas observer de tel point.



## Exercice 6

Ici aussi, le calcul direct pose une intégrale triple dans laquelle on ne peut pas « séparer » les coordonnées sphériques du point P sur lequel on intègre pour pouvoir obtenir le produit de trois intégrales simples. C'est donc très probablement impossible, en tout cas certainement très compliqué.

Comme ce problème possède des symétries telles qu'en tout point de l'espace, on peut connaître la topographie du champ électrostatique  $\vec{E}$ , le théorème de Gauss permet de calculer ce champ  $\vec{E}$  et nous déduirons le potentiel V de son expression.

Le calcul du champ en coordonnées sphériques de centre O (voir exercice 8 du chapitre 2) aboutit à :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(r > R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On trouve le potentiel V est à partir des relations :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ  $\vec{E}$ , il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \text{et} \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

V ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$  (nous le savions depuis la constatation des deux invariances par rotation). Il reste la dernière équation à résoudre dans chacun des deux domaines.

- Pour  $r < R$ , on a  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right)$ , soit  $V(r) = \frac{\rho_0 r^2}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{3} + \frac{r^2}{10R^2} \right) + K$ .

- Pour  $r > R$ , on a  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2}$ , soit  $V(r) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r} + K'$ .

Le potentiel étant une primitive du champ, chaque domaine fait apparaître une constante dans l'expression du potentiel. Les deux constantes sont déterminées en utilisant les conditions de continuité (ici une seule condition pour  $r = R$ ) et la valeur de V choisie arbitrairement, car V est défini à une constante additive près (ici  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ ).

Le potentiel est nul à l'infini, donc :

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 + K' = K' = 0 \quad \text{et} \quad V(r > R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r}.$$

Le potentiel est continu en  $r = R$  :

$$V(r = R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{3} + \frac{R^2}{10R^2} \right) + K,$$

$$K = \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) = \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} + \frac{7\rho_0 R^2}{60\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0},$$

donc finalement :

$$V(r < R) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \left( -\frac{r^2}{3R^2} + \frac{r^4}{10R^4} + \frac{1}{2} \right), \quad V(r > R) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r}.$$

## Exercice 7

La démarche est celle de la méthode n° 2. Pour réunir cette distribution de quatre charges, on place la première, celle du point A par exemple. Cela ne nécessite aucun travail particulier.

Puis on rapproche la seconde pour la placer en B par exemple. L'opérateur doit lutter contre la force électrostatique qui s'exerce sur la seconde charge de la part du champ de la première. Nous avons vu que si  $V_A(B)$  est le



potentiel électrostatique créé en B par la charge se trouvant en A, alors l'opérateur doit fournir le travail :

$$W_{op} = q[V_A(B) - V_A(\infty)] = qV_A(B).$$

Ce travail est aussi l'énergie potentielle électrostatique de cette distribution de deux charges.

Pour continuer à construire la distribution, on rapproche la troisième charge depuis l'infini jusqu'au point C. L'opérateur effectue alors le travail supplémentaire :

$$W'_{op} = q[V_A(C) + V_B(C)],$$

car lors de ce rapprochement, les deux forces de Coulomb exercées par les charges présentes en A et B ont travaillé.

Les trois charges  $q$  sont présentes aux points A, B et C. Il reste à amener la dernière au point D. Lors du trajet de la dernière charge  $q$  vers le point D, l'opérateur doit lutter contre les forces de Coulomb exercées par les trois charges présentes aux points A, B et C et il effectue alors le travail supplémentaire :

$$W''_{op} = q[V_A(D) + V_B(D) + V_C(D)].$$

Au final, le travail total que l'opérateur a effectué pour rapprocher ces quatre charges vaut la somme des travaux et représente l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  que possède la distribution des quatre charges ainsi positionnées (sur les sommets du carré) :

$$E_p = W_{op} + W'_{op} + W''_{op} = q[V_A(B) + V_A(C) + V_B(C) + V_A(D) + V_B(D) + V_C(D)].$$

Les potentiels sont ceux créés par une charge ponctuelle  $q$  à la distance  $r$ , en le prenant nul à l'infini :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (K = 0 \text{ pour avoir } V = 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty).$$

Comme  $AB = BC = CD = AD = a$  et  $AC = BD = a\sqrt{2}$ , les potentiels s'écrivent :

$$V_A(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AB} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} = V_B(C) = V_C(D) = V_A(D), \quad V_A(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AC} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} = V_B(D);$$

et l'énergie potentielle électrostatique vaut finalement :

$$E_p = 4 \times \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} + 2 \times \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

## Exercice 8

1) Dans ce modèle, le cortège électronique est constitué par une densité volumique de charges s'étendant jusqu'à l'infini depuis  $r = a$ . Pour avoir la charge totale du cortège, il faut intégrer sa densité volumique de charges  $\rho$  sur tout l'espace extérieur au noyau. En coordonnées sphériques, on intègre sur  $r$  de  $a$  à l'infini, sur  $\theta$  de  $0$  à  $\pi$  et sur  $\phi$  de  $0$  à  $2\pi$  :

$$q = \iiint \rho dV = \iiint \rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \int_{r=a}^{\infty} \rho(r) r^2 dr \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta}_2 \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = 4\pi A \int_{r=a}^{\infty} r^{2-n} dr = 4\pi A \left[ \frac{r^{3-n}}{3-n} \right]_a^{\infty}$$

Si  $n = 3$ , alors l'intégrale est un logarithme qui diverge lorsque  $r \rightarrow \infty$ , et si  $n < 3$ , alors  $3 - n > 0$  et l'intégrale diverge du fait de sa borne supérieure. On sait que la charge du cortège électronique est finie et vaut même  $-Ze$ , donc  $n > 3$  est une condition nécessaire pour que la charge du cortège électronique demeure finie.

Dans ce cas  $r^{3-n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  et  $q = 4\pi A \frac{a^{3-n}}{n-3}$ .

2) Il s'agit du cortège électronique, nous savons qu'il y a  $Z$  protons et que l'atome est neutre :

$$q = 4\pi A \frac{a^{3-n}}{n-3} - Ze, \text{ soit } A = -\frac{Ze(n-3)}{4\pi a^{3-n}} < 0.$$

3) Dans tous ces problèmes dits « à symétrie sphérique » dans lesquels les grandeurs ne dépendent que de la distance  $r$  à un point fixe (l'origine  $O$  du repère sphérique), les considérations de symétrie et d'invariance sont toujours les mêmes :

$M$  étant un point quelconque, tout plan contenant la droite  $(OM)$  est plan de symétrie pour le dispositif (charges), donc le champ électrostatique créé en  $M$  est colinéaire à cette droite (intersection de ces plans) :  $\vec{E}(M) = E \vec{u}_r$  ( $\vec{u}_r$ , vecteur unitaire de la base sphérique).

De plus, il y a invariance par toute rotation autour du point  $O$ , donc en coordonnées sphériques, donc  $E$  ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r.$$

Comme on connaît la direction du champ  $\vec{E}$  en tout point  $M$ , on peut utiliser le théorème de Gauss pour déterminer  $E$ . La surface de Gauss est une sphère centrée sur  $O$  et passant par  $M$ , donc de rayon  $r > a$ . Sur cette sphère,  $E$  reste constant et  $\vec{n} = \vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot \vec{n} = E(r)$ . Le flux est :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_S E dS = E \iint_S dS = E \times S = 4\pi r^2 E.$$

Calculons la charge intérieure à cette sphère. Le noyau  $y$  est entièrement inclus et contient la charge  $+Ze$ , et il faut calculer la charge du nuage électronique qui se trouve entre les distances  $a$  et  $r$  du point  $O$  (on se sert du calcul de la question précédente) :

$$q_{\text{int}} = Ze + 4\pi A \left[ \frac{r^{3-n}}{3-n} \right]_a^r = Ze - \frac{Ze(n-3)}{a^{3-n}} \frac{r^{3-n} - a^{3-n}}{3-n} = Ze - \frac{Ze(n-3)}{a^{3-n}} \frac{r^{3-n}}{3-n} + \underbrace{\frac{Ze(n-3)}{a^{3-n}} \frac{a^{3-n}}{3-n}}_{-Ze}$$

$$q_{\text{int}} = \frac{Zer^{3-n}}{a^{3-n}}, \text{ avec } r > a.$$

Appliquons maintenant le théorème de Gauss :

$$\phi = 4\pi r^2 E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Zer^{3-n}}{\epsilon_0 a^{3-n}}, \text{ donc } E(r) = \frac{Zer^{1-n}}{4\pi\epsilon_0 a^{3-n}} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{Zer^{1-n}}{4\pi\epsilon_0 a^{3-n}} \vec{u}_r.$$

4) Le potentiel  $V$  et le champ  $\vec{E}$  sont reliés par la relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ .

En coordonnées sphériques, l'opérateur gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ  $\vec{E}$ , il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \text{ et } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Donc le potentiel  $V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$ . On le détermine avec la dernière équation à résoudre le domaine considéré  $r > a$  :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{Zer^{1-n}}{4\pi\epsilon_0 a^{3-n}}, \text{ soit } V(r) = \frac{-Zer^{2-n}}{4\pi\epsilon_0(2-n)a^{3-n}} + K.$$

Or  $V = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , donc  $K = 0$ . En effet, comme  $n > 3$ , la puissance  $2-n$  de  $r$  est strictement négative et  $r^{2-n}$  s'annule lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

Finalement :

$$V(r) = \frac{-Zer^{2-n}}{4\pi\epsilon_0(2-n)a^{3-n}} > 0.$$

5) L'énoncé nous apprend que  $\rho = KV^{3/2}$ , ce qui se traduit ici par l'égalité des fonctions puissance de la variable  $r$  :

$$(r^{2-n})^{3/2} = r^{-n}, \text{ soit } \frac{3}{2}(2-n) = -n, \text{ c'est-à-dire } n = 6.$$

La fonction potentiel s'écrit enfin :  $V(r) = \frac{Zer^{-4}}{4\pi\epsilon_0(2-n)a^{3-n}}$ .

## Exercice 9

1) Le champ  $\vec{E}$  créé par un fil a été calculé dans les applications 1 et 3 du chapitre 2, où les deux méthodes de calcul peuvent être comparées : le théorème de Gauss donne des résultats plus rapidement lorsqu'il peut être mis en œuvre. Ici, on rappelle l'expression du champ  $\vec{E}$  en prenant les notations de l'énoncé actuel :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r, \text{ avec } r = FM \text{ et } \vec{u}_r = \frac{\vec{FM}}{FM}.$$

Le potentiel créé par un fil a été calculé au paragraphe D.2 de ce chapitre :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + K, \text{ où } r = FM \text{ ici.}$$

2) Au point O,  $r = OF = a$  et  $V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + K$ , d'où  $K = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$  et :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}, \text{ donc } V - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}.$$

3) Le potentiel en M est la somme de celui créé par chacun des deux fils séparément, conformément au principe de superposition :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r' + K' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r} + K',$$

où  $r = FM$ ,  $r' = F'M$  et  $K'$  une constante.

Pour le point O, on a  $r = OF = a$  et  $r' = OF' = a$ , donc :

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{a} + K' = K',$$

et par suite :

$$V - V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r}.$$

4) Lorsque M s'éloigne indéfiniment du dispositif des deux fils, alors :

$$r' \rightarrow r, \text{ ou } \frac{r'}{r} \rightarrow 1, \text{ et } V - V_0 \rightarrow 0, \text{ soit } V \rightarrow V_0.$$

Si on souhaite que le potentiel soit nul à l'infini, il faut choisir  $V_0 = 0$  et il vient :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r}.$$

5) En posant  $\alpha = \frac{2\pi\epsilon_0}{\lambda}$ , le potentiel s'écrit  $V = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r'}{r}$ . Sur une équipotentielle,  $V$  garde une valeur constante (et choisie) et les coordonnées du point M vérifient une équation du type :

$$\alpha V = \ln \frac{r'}{r}, \text{ soit } \frac{r'}{r} = e^{\alpha V}.$$

On est bien dans le cas  $\frac{r'}{r} = k$ , avec  $k = e^{\alpha V}$ , constante positive.

6) Lorsque  $V = 0$ , on a  $k = 1$  et  $r' = r$ , soit  $F'M = FM$ . Les coordonnées du point M appartenant à l'équipotentielle  $V = 0$  satisfont cette équation. En fait,  $F'M = FM$  définit le plan médiateur des deux points F et F', c'est-à-dire le plan  $(yOz)$ .

L'équipotentielle  $V = 0$  est le plan  $(yOz)$ .

7) Notons  $M(x, y, 0)$  et rappelons  $F(a, 0, 0)$  et  $F'(-a, 0, 0)$ . Donc les distances  $r$  et  $r'$  valent :

$$r = FM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad r' = F'M = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Les coordonnées de M appartenant à l'équipotentielle V satisfont donc l'équation :

$$\frac{r^2}{r} = k = \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}, \text{ soit } k^2[(x-a)^2 + y^2] = (x+a)^2 + y^2.$$

On essaie d'identifier cette équation à celle du cercle donnée dans l'énoncé :

$$(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 - 2a(k^2 + 1)x + (k^2 - 1)a^2 = 0, \text{ or } k = e^{\alpha V} > 1 \text{ si } V \neq 0 \text{ (supposé).}$$

$$x^2 - 2a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} x + y^2 + a^2 = 0, \left(x - a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 - \left(a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + a^2 = 0,$$

$$\left(x - a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 - a^2 = a^2 \frac{(k^2 + 1)^2 - (k^2 - 1)^2}{(k^2 - 1)^2} = a^2 \frac{4k}{(k^2 - 1)^2}.$$

On a donc obtenu l'équation d'un cercle de centre  $C\left(a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, 0\right)$  et de rayon  $R = a \frac{2k}{k^2 - 1}$ . Ce cercle est bien centré sur l'axe Ox, lequel n'est autre que la droite FF'.

### Exercice 10

1) a) Il s'agit du dispositif de l'exercice 5 du chapitre 2. On avait trouvé en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r, \text{ où } r = HM.$$

b) Le calcul, effectué dans ce même exercice a donné, en utilisant le théorème de Gauss :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

c) Le calcul du potentiel a été fait dans l'exercice 3 de ce chapitre. Il nous faut seulement conserver les constantes, la valeur arbitraire du potentiel choisie par l'énoncé ayant changé :

$$V(r \leq R) = K \quad \text{et} \quad V(r \geq R) = \frac{-\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + K'.$$

Comme  $V(R) = V_0$ , on a  $K = V_0$  et  $V_0 = K' - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R$ , soit  $K' = V_0 + \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R$ .

Enfin :  $V(r \leq R) = V_0$  et  $V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + V_0$ .

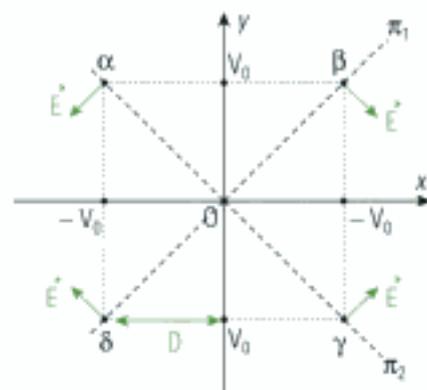
2) a) Le dispositif restant invariant dans toute translation dans la direction de l'axe (Oz), V(M) ne dépend pas de z.

b) On représente le dispositif dans le plan (Oxy). Le plan (Oxy) est plan de symétrie pour ce dispositif, mais aussi les plans (Oxz) et (Oyz). Ainsi, au point O, le champ électrostatique doit faire partie de l'intersection de ces trois plans, c'est-à-dire un point :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

On sait aussi que  $V = 0$  en O.

c) Le plan  $\pi_1$  passant par  $\beta$  et  $\delta$  et contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution des charges. En effet, deux cylindres aux potentiels opposés portent des densités de charges opposées. Le champ électrostatique est orthogonal à tout point d'un plan d'antisymétrie, et on sait que le vecteur  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants, donc *a priori* préférentiellement de la région  $V_0$  vers la région  $-V_0$ . De même, le plan  $\pi_2$  contenant  $\alpha$ ,  $\gamma$  et l'axe Oz est aussi plan d'antisymétrie pour les charges. On a donc pu tracer les quatre vecteurs  $\vec{E}$  aux quatre points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .



Le champ électrostatique étant orthogonal aux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , ces deux plans définissent des surfaces équipotentielles. Or ils passent par O et on sait que  $V = 0$  en O, donc ces deux plans définissent l'équipotentielle  $V = 0$ .

d) On sait tout d'abord que  $V = 0$  en O, ce qui donne directement  $a = 0$ .

Le plan (Oxz) est plan de symétrie pour la distribution, donc  $V(-y) = V(y)$ , ce qui s'écrit :

$$bx + c(-y) + dx^2 + e(-y)^2 + fx(-y) = bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy, \text{ soit } 2(fx + c)y = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$ , en choisissant  $x = 0$  et  $y \neq 0$ , il vient  $c = 0$ , ce qui donne  $fxy = 0$  et implique, lorsque  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$  :  $f = 0$ . Il reste :

$$V(x, y) = bx + dx^2 + ey^2.$$

Le plan (Oyz) est aussi plan de symétrie pour la distribution, donc  $V(-x) = V(x)$ , soit :

$$b(-x) + d(-x)^2 + ey^2 = bx + dx^2 + ey^2, \text{ ou } 2bx = 0, \text{ et donc } b = 0.$$

Le potentiel s'écrit maintenant :

$$V(x, y) = dx^2 + ey^2.$$

Il reste à considérer les plans d'antisymétrie  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Ils transforment les cylindres chargés en leurs opposés, donc les potentiels en des potentiels opposés. La symétrie par rapport au plan  $\pi_1$  transforme  $x$  en  $y$  et le potentiel change de signe, ce qui s'écrit :

$V(x, y) = -V(y, x)$ , soit  $dx^2 + ey^2 = -(dy^2 + ex^2)$ , ou  $(d + e)(y^2 + x^2) = 0$ , donc  $d = -e$ , car  $x$  et  $y$  doivent rester quelconques.

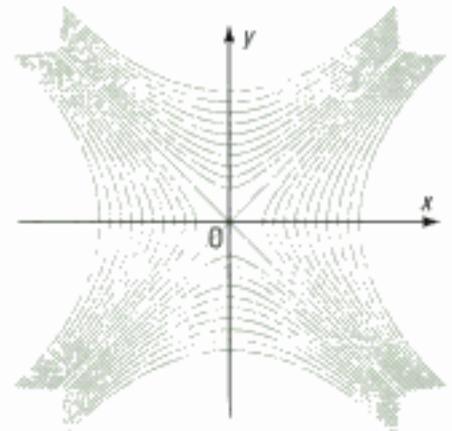
L'expression finale du potentiel est donc  $V(x, y) = d(x^2 - y^2)$ , où  $d$  est une constante.

e) Le point  $M(x, y)$  appartenant à l'équipotentielle de valeur  $V$  voit ses coordonnées vérifier l'équation :

$$V = d(x^2 - y^2).$$

On reconnaît des hyperboles dont les asymptotes sont les bissectrices des axes (Ox) et (Oy).

Pour l'équipotentielle  $V = 0$ , on a  $x^2 = y^2$ , soit  $y = \pm x$  : on retrouve les deux bissectrices découvertes dans la question c).



## Exercice 11

1) Tout plan passant par M et O est plan de symétrie pour la distribution et le champ est dirigé selon  $\vec{u}_r$  en tout point M. De plus on constate deux invariances par rotation autour de O, donc en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r \text{ en tout point M.}$$

Appliquons donc le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée « de Gauss » une sphère centrée sur O et passant par M (donc de rayon  $r = OM$ ). Cette démarche a déjà été faite à l'identique dans l'exercice 2 du chapitre 2 précédent et on en reporte le résultat :

$$\phi = 4\pi r^2 E.$$

Lorsque M est tel que  $r > R$ , la sphère de Gauss contient la charge totale Q.

Le théorème de Gauss donne :

$$\phi = 4\pi r^2 E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ donc } \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Le potentiel V est calculé à partir de la relation :  $\vec{E} = -\text{grad}V$ .

En coordonnées sphériques, l'opérateur gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

En identifiant l'expression du gradient et celle du champ  $\vec{E}$ , il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \text{ et } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Donc  $V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\phi$ , mais seulement de  $r$  donc  $E_r = -\frac{dV}{dr}$  permet de trouver  $V$  :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ soit } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C.$$

Le potentiel étant nul à l'infini,  $V(r \rightarrow \infty) = 0 = 0 + C$ , donc  $C = 0$  et  $V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

La distribution de charges étant volumique, le champ et le potentiel sont continus partout, donc pour  $r = R$  aussi. Le champ et le potentiel valent respectivement :

$$E(r = R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ et } V(r = R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Il faut maintenant écrire les valeurs limites du domaine  $r \in \left[ \frac{R}{2}; R \right]$  des champ et potentiel.

Le potentiel est  $V(r = R) = KR(R - R) + K' = K'$ , on en tire  $K' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ .

Le champ est tel que  $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -K(R - 2r)$ , donc  $E_r(r = R) = -K(R - 2R) = KR$ , et la continuité du champ donne  $KR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ , soit  $K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ .

2) On ne connaît la fonction potentiel que lorsque  $r \geq \frac{R}{2}$ . Il faut la déterminer dans l'espace  $r \leq \frac{R}{2}$  et nous pourrons répondre à la question.

Pour calculer le potentiel, on calcule d'abord le champ que le théorème de Gauss permet d'obtenir facilement. On garde en effet une surface de Gauss sphérique de centre  $O$  et de rayon  $r \leq \frac{R}{2}$ .

Le flux du champ vaut  $\phi = E4\pi r^2$  et la charge intérieure est nulle.

Donc pour  $r \leq \frac{R}{2}$ ,  $E = 0 = -\frac{\partial V}{\partial r}$  et  $V$  reste constant. Sa valeur en  $O$  est donc égale à sa valeur pour  $r = \frac{R}{2}$ .

$$V(0) = V\left(r = \frac{R}{2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{R}{2} \left(R - \frac{R}{2}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 R}.$$

Le champ est nul mais cela n'impose pas au potentiel de l'être aussi !

## Exercice 12

1) La distribution est volumique, donc le potentiel est défini et continu partout. Pour calculer sa valeur à la surface de la sphère, on prend la valeur limite de l'un des domaines intérieur ou extérieur à la sphère, dans lequel le potentiel est le plus simple à calculer.

Ce calcul a déjà été fait dans l'exercice 1 avec la même origine des potentiels :

$$V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}.$$

Lorsque  $r = R$ , on a évidemment  $V(r = R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$ .

2) La charge  $dq$  occupe donc une couronne sphérique d'épaisseur  $dr$ . Le volume correspondant est  $dV = 4\pi r^2 dr$  et contient des charges avec la densité  $\rho$  :

$$dq = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr.$$

3) La charge  $dq$  vient de l'infini, où le potentiel est nul, et arrive à la position finale  $r$ , où le potentiel vaut  $V = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$  (voir la question 1, en remplaçant  $R$  par  $r$ ). L'opérateur a fourni le travail :

$$dW = dq[V - V(\infty)] = dqV = 4\pi\rho r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}.$$

4) Pour construire cette sphère, l'opérateur doit faire croître son rayon  $r$  depuis 0 jusqu'à  $R$ , et pour cela il amène successivement des charges  $dq$  depuis l'infini de sorte que le rayon  $r$  augmente successivement de  $dr$ . Le travail total accompli est la somme des travaux nécessaires à cette construction :

$$W = \int dW = \int_{r=0}^R \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

# Le dipôle électrostatique

## Introduction

Le dipôle électrostatique est un dispositif fréquemment utilisé en physique.

Il possède une charge électrique nulle mais crée un champ électrostatique non nul. On trouve cette situation lorsque les barycentres des charges positives et négatives sont décalés (cas de la molécule d'eau) et un grand nombre de distributions de charges de ce type peut être considéré, par analogie, comme un dipôle.

### Plan du chapitre 4

A. Définition .....	98
B. Étude du dipôle actif	
1. Potentiel créé par deux charges .....	98
2. Champ créé .....	99
3. Diagramme électrique.....	99
C. Étude du dipôle passif	
1. Cas d'un champ extérieur uniforme : force et moment .....	100
2. Énergie du dipôle dans le champ extérieur .....	100
3. Cas d'un champ extérieur non uniforme .....	101
D. Intérêt de la notion de dipôle	
1. Action d'un système de charges à grande distance.....	102
2. Détermination de la structure de molécules.....	103
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre.....	104
<b>Énoncés des exercices</b> .....	107
<b>Indications</b> .....	108
<b>Solutions des exercices</b> .....	109

## A. Définition

Un doublet électrostatique est un ensemble de deux charges opposées  $-q$  et  $+q$  liées l'une à l'autre invariablement en deux points A( $-q$ ) et B( $+q$ ). La distance  $a = AB$  reste donc constante.

### Définition 1

Un dipôle électrostatique est un doublet électrostatique tel que la distance  $a$  entre les deux charges opposées  $-q$  et  $+q$  est petite.

Le dipôle est dit *actif* lorsque la distance  $a = AB$  reste petite devant la distance  $r = AM = BM$  du point M où l'on considère le champ électrostatique créé par le doublet A( $-q$ ) et B( $+q$ ).

Le dipôle est dit *passif* lorsque la distance  $a = AB$  reste suffisamment petite pour que l'on puisse considérer le champ dans lequel le doublet se trouve plongé comme uniforme sur l'étendue du doublet<sup>1</sup>.

### Définition 2

On appelle moment dipolaire (fig.1) le vecteur :

$$\vec{p} = q \vec{AB}.$$

Le moment dipolaire  $p = qa$  se mesure en coulombs mètres (C.m) mais une autre unité est le debye (D) :

$$1 \text{ D} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m.}$$

1. S'il ne l'est pas, la distance  $a$  est alors petite devant la distance caractéristique  $d$  de variation du champ électrostatique « extérieur » dans lequel le doublet est plongé.

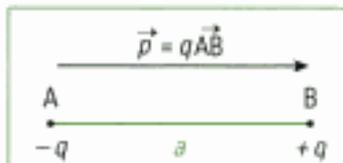


Fig. 1 – Moment dipolaire.

2. Un plan peut n'être défini que par trois points, donc travailler dans le plan (Oxy) ainsi défini n'est pas une limitation de l'étude, mais un choix simplificateur des coordonnées.

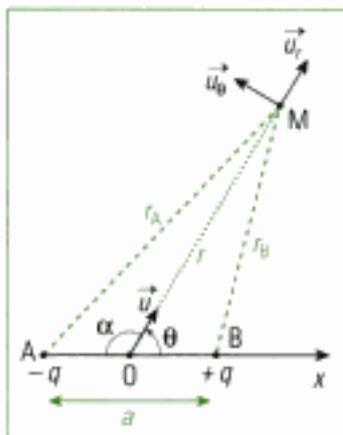


Fig. 2 – Dipôle actif.

3. On parle aussi de formule d'Al-Kashi.

## B. Étude du dipôle actif

### B.1. Potentiel créé par deux charges

Soit le point A portant la charge ( $-q$ ), le point B portant la charge ( $+q$ ) et un point M quelconque (fig. 2). Les points A, B et M définissent un plan (Oxy)<sup>2</sup> où l'origine O est située au milieu de AB. On choisit un système de coordonnées polaires de sorte que le moment dipolaire porté par l'axe (Ox) soit orienté vers les x positifs.

Le potentiel en M (choisi nul à l'infini) créé par les deux charges ponctuelles ( $-q$ ) et ( $+q$ ) s'écrit, d'après le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}.$$

On peut exprimer les distances AM et BM à partir des coordonnées des points A, B et M :

$$A\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right), B\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \text{ et } M(r\cos\theta, r\sin\theta, 0),$$

en prenant la norme des vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{BM}$ .

On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore généralisé<sup>3</sup> dans les triangles AOM et BOM.

Dans le triangle AOM :  $AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2 \times AO \times OM \times \cos\alpha$ .

Or  $\alpha = \pi - \theta$ ,  $OM = r$  et  $AO = OB = \frac{a}{2}$ , donc la relation devient :

$$AM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta, \text{ soit } AM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta}.$$

Dans le triangle BOM :  $BM^2 = BO^2 + OM^2 - 2 \times BO \times OM \times \cos\theta$ ,

$$BM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar\cos\theta, \text{ soit } BM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 - ar\cos\theta}.$$

4. Cette hypothèse porte le nom d'approximation dipolaire.

Le potentiel s'écrit  $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-1}{AM} + \frac{1}{BM} \right)$  et comme<sup>4</sup>  $a \ll r$ , les distances AM et BM sont voisines ; un développement limité en  $\frac{a}{r}$  est ici adapté pour simplifier cette différence :

$$\frac{1}{AM} = \left( \frac{a^2}{4} + r^2 + ar\cos\theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos\theta \right).$$

$$\text{De même : } \frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos\theta \right).$$

Et le potentiel  $V(M)$  s'écrit alors :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-1}{AM} + \frac{1}{BM} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ - \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos\theta \right) + \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos\theta \right) \right],$$

$$V(M) = \frac{qacos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ au premier ordre en } \frac{a}{r}.$$

N'ayant pas obtenu de résultat nul, il était inutile de prendre en compte les termes d'ordre 2 en  $\frac{a}{r}$ , négligeables devant ceux d'ordre 1.

#### Loi 1

Le potentiel électrostatique créé par un dipôle actif vaut :

$$V(M) = \frac{qacos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On a choisi la constante additive nulle, ce qui rend  $V$  nul à l'infini où le champ électrostatique créé par chacune des charges ponctuelles est nul.

## B.2. Champ créé

La relation  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$  permet d'exprimer, en coordonnées polaires, le champ électrostatique créé par le dipôle :

$$-\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta, \text{ soit } \vec{E} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta.$$

#### Loi 2

Le champ  $\vec{E}$  à la distance  $r$  créé par un dipôle  $\vec{p} = p \cdot \vec{u}_x$  placé en O a pour composantes, en coordonnées polaires d'origine O :

$$E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Le vecteur champ est inclus dans le plan (Oxy), ce que vérifie le principe de superposition<sup>5</sup>.

5. Chacun des deux vecteurs champs créés par chacune des charges ponctuelles est dans ce plan, donc la somme des deux vecteurs l'est a fortiori.

## B.3. Diagramme électrique

Les équipotentielles sont données par :

$$V = \text{cte}, \text{ soit } r^2 = k \cos\theta,$$

où  $k$  est une constante qui dépend de la valeur du potentiel :

$$k = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V}.$$

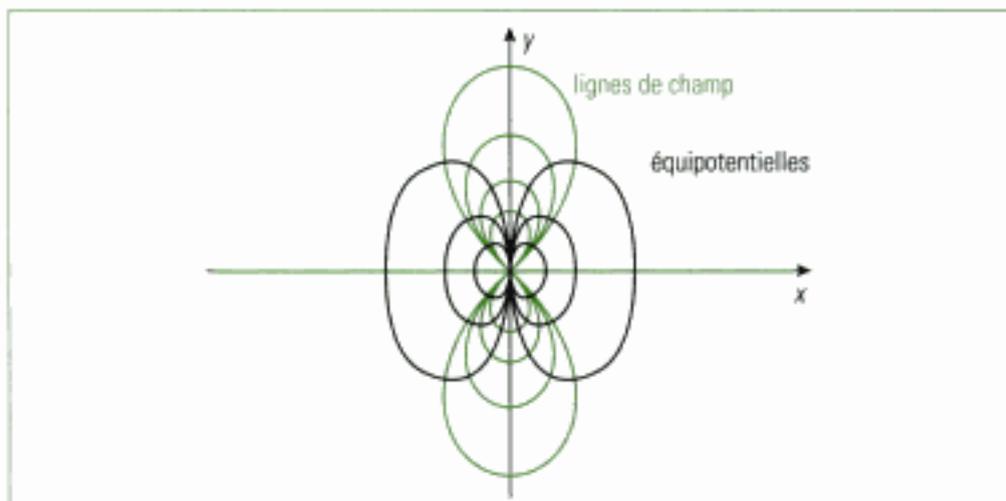


Fig. 3 – Lignes de champ et équipotentielles.

6.  $V = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$ , soit  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  qui définit l'axe  $Oy$  en coordonnées polaires.

7. Leur démonstration n'est plus au programme, mais peut se comprendre.  $\vec{E}$  est tangent à la ligne de champ. En l'un de ses points  $M$ , un élément de longueur  $d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$  centré sur  $M$  et  $\vec{E}$  sont colinéaires. On écrit :

$$d\vec{l} \wedge \vec{E} = \vec{0},$$

on obtient l'équation différentielle  $E_\theta dr = E_r r d\theta$ , puis on sépare les variables.

8. Ce champ est créé par une autre distribution de charges que celle du dipôle.

L'équipotentielle  $V = 0$  est le plan  $(Oyz)$ , qui se projette selon l'axe  $(Oy)$  dans le plan  $(Oxy)$ . Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentiels (fig. 3). Elles ont pour équation, en coordonnées polaires :

$$r = k' \sin^2\theta, \text{ où } k' \text{ est une constante}^7.$$

## C. Étude du dipôle passif

On étudie les actions subies par un dipôle électrostatique (points  $A(-q)$  et  $B(+q)$ ) lorsqu'il est plongé dans un champ électrostatique extérieur<sup>8</sup>.

On cherche la résultante des forces que le dipôle subit de la part du champ extérieur, puis le moment résultant.

On étudie ensuite le caractère conservatif de cette force.

### C.1. Cas d'un champ extérieur uniforme : force et moment

La résultante des forces subies par le dipôle s'écrit (fig. 4) :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}.$$

Calculons le moment de cet ensemble de forces en un point  $C$  quelconque :

$$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{CA} \wedge \vec{F}_A + \vec{CB} \wedge \vec{F}_B = (-\vec{CA} + \vec{CB}) \wedge q\vec{E} = q\vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Ce moment ne dépend plus de  $C$ , donc du point où on le calcule<sup>9</sup>. On dit que le dipôle subit un couple (force nulle et moment non nul).

#### Loi 3

Un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrostatique uniforme subit une résultante des forces nulle, le moment de cette force étant non nul et indépendant du point où on le calcule :

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ et } \vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Le sens du moment donne le sens naturel de rotation du dipôle via la règle du tire-bouchon. Le dipôle (ou plutôt son moment dipolaire) tend spontanément à s'orienter dans le sens du champ extérieur.

### C.2. Énergie du dipôle dans le champ extérieur

L'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  est égale au travail fourni par l'opérateur pour amener le dipôle de l'infini jusqu'à sa position finale<sup>10</sup>.

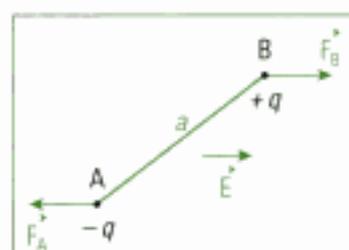


Fig. 4 – Dipôle passif.

9. Ce résultat est logique. Cela est toujours le cas lorsque la résultante des forces est nulle et la démonstration peut être faite en utilisant la théorie des torseurs (ici le torseur des actions exercées).

10. Cette définition a été adoptée au chapitre 3 pour l'énergie potentielle électrostatique.

Soient  $V_A$  et  $V_B$  les valeurs du potentiel du champ aux points A et B, Sachant que l'on ne rapproche pas les charges l'une de l'autre, mais que l'on amène le dipôle depuis une position éloignée où le champ extérieur est nul jusqu'à sa position finale, l'expression de l'énergie potentielle électrostatique du dipôle est :

$$E_p = (-q)V_A + qV_B = q(V_B - V_A).$$

Or la circulation du champ extérieur  $\vec{E}$  entre A et B vaut :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{AB}, \text{ et aussi } \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = V_A - V_B.$$

On en tire :

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{AB} \text{ et } E_p = q(V_B - V_A) = -q\vec{E} \cdot \vec{AB} = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

#### Loi 4

Un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  possède l'énergie potentielle électrostatique :

$$E_p = q(V_B - V_A) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

### C.3. Cas d'un champ extérieur non uniforme

Même si le champ extérieur  $\vec{E}$  n'est pas uniforme, la notion de dipôle impose que sur l'étendue du dipôle, le champ extérieur varie très faiblement<sup>11</sup>. On admet alors que :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{AB}, \text{ le terme correctif étant négligeable.}$$

#### Loi 5

L'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  du dipôle plongé dans un champ extérieur non uniforme garde donc la même expression :

$$E_p = q(V_B - V_A) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Si on ne tient pas compte des variations du champ extérieur  $\vec{E}$ , alors la force est nulle. Cela reviendrait ici à négliger un terme qui contiendrait les petites variations de  $\vec{E}$  devant la force totale, c'est-à-dire zéro !

Il faut donc tenir compte du caractère non uniforme de  $\vec{E}$  pour déterminer la force que subit le dipôle.

La force de Coulomb étant conservative, on a pu définir l'énergie potentielle électrostatique, qui n'est autre que l'énergie potentielle associée à cette force.

Lorsqu'une force  $\vec{F}$  est conservative, elle est reliée à son énergie potentielle associée par la relation  $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}E_p$ .

#### Loi 6

La force  $\vec{F}$  que le dipôle subit de la part du champ extérieur non uniforme a pour expression :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}E_p = \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

Le travail  $W$  de cette force depuis une position 1 vers une position 2 est :

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 -\vec{\text{grad}}E_p \cdot d\vec{l} = [-dE_p]_1^2 = E_{p1} - E_{p2}.$$

Le déplacement est spontané si le travail est moteur, c'est-à-dire positif, soit lorsque l'énergie potentielle décroît.

11. C'est l'autre forme de l'approximation dipolaire, lorsque le dipôle est passif, c'est-à-dire lorsque l'on étudie les actions qu'il subit.

Lorsque le champ extérieur  $\vec{E}$  est uniforme, l'énergie potentielle est minimale lorsque  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont colinéaires et de même sens : le moment dipolaire s'oriente spontanément dans la direction et le sens du champ extérieur  $\vec{E}$ .

**Loi 7**

Le moment dipolaire  $\vec{p}$  s'oriente spontanément dans le sens du champ extérieur  $\vec{E}$ .

Lorsque le champ extérieur  $\vec{E}$  n'est pas uniforme, le moment dipolaire s'oriente spontanément dans la direction et le sens du champ extérieur  $\vec{E}$ , et le dipôle se déplace de telle manière que le module  $E = \|\vec{E}\|$  du champ augmente, ce qui fait décroître l'énergie potentielle électrostatique.

**Loi 8**

Le dipôle tend à se déplacer spontanément vers les zones de champ extérieur plus intense.

## D. Intérêt de la notion de dipôle

### D.1. Action d'un système de charges à grande distance

Une distribution de charges étudiée « à grande distance », c'est-à-dire à une distance  $r$  très supérieure à son étendue  $a$ , est équivalente à un dipôle<sup>12</sup>.

On retrouve l'approximation dipolaire.

Soit un ensemble de  $N$  charges  $q_i$  placées respectivement en des points  $O_i$  et soit  $O$  un point du voisinage de cet ensemble de charges. On étudie le champ et le potentiel électrostatiques de cet ensemble de charges en un point  $M$  éloigné : la distance  $r = OM$  doit être très supérieure à chacune des distances  $OO_i = a_i$ .

On exprime le potentiel  $V$  au point  $M$  grâce au principe de superposition :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \text{cte, où } r_i = O_iM.$$

Avec  $\vec{a}_i = \vec{OO}_i$ , on a :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{O}_i\vec{O} + \vec{OM})^2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-1/2}.$$

On effectue un développement limité du premier ordre<sup>13</sup> en :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}_i}{r^3} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}_i}{r^2}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

L'expression du potentiel devient alors :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{u} \cdot \sum_i q_i \vec{a}_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$

On n'a pas écrit les termes correspondant à l'ordre 2, mais ils restent petits. Le premier terme, s'il n'est pas nul, est évidemment très grand devant le second et ainsi de suite.

On peut distinguer plusieurs cas.

12. N'oublions pas qu'une condition nécessaire pour pouvoir parler de dipôle, actif ou passif, est que la charge électrique totale de la distribution soit nulle !

13. C'est l'approximation dipolaire.

Hidden page

# L'essentiel

## ✓ Dipôle électrostatique

- Un doublet est un ensemble de deux charges opposées  $-q$  et  $+q$  distantes de  $a$ .
- Un dipôle électrostatique est un doublet tel que la distance  $a$  entre les deux charges opposées  $-q$  et  $+q$  est petite.

• On appelle moment dipolaire le vecteur  $\vec{p} = q \vec{AB}$  ( $-q$  en A et  $+q$  en B).

• Le potentiel  $V(M)$  créé par un dipôle actif est :

$$V(M) \approx \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

• Le champ  $\vec{E}$  créé par un dipôle actif est :

$$\vec{E} \approx \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta.$$

• Un dipôle passif plongé dans un champ uniforme  $\vec{E}$  subit une force  $\vec{F}$  et un moment  $\vec{M}$  tels que :

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ et } \vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

• Un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$  plongé dans un champ uniforme  $\vec{E}$  possède l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  :

$$E_p = q(V_B - V_A) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

• La force  $\vec{F}$  exercée par le champ  $\vec{E}$  sur le dipôle passif s'écrit :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}E_p = \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

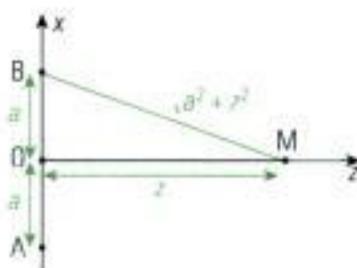
• Spontanément, le moment dipolaire  $\vec{p}$  s'oriente dans le sens du champ extérieur  $\vec{E}$  et le dipôle tend à se déplacer vers les zones de champ extérieur plus intense.

# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment identifier une distribution de charges à un dipôle électrostatique ?

Soit une distribution particulière de charges. Montrer que pour un point M éloigné cette distribution a les mêmes caractéristiques qu'un dipôle dont on donnera le moment dipolaire  $p$ .



#### → Savoir faire

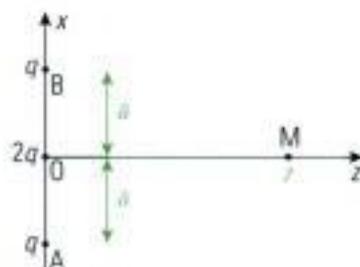
- ① Calculer la charge totale. Si elle n'est pas nulle, alors la distribution ne sera pas équivalente à un dipôle.
- ② Calculer le potentiel électrostatique  $V$  en  $M$  (éventuellement le champ électrostatique  $\vec{E}$  pour calculer le potentiel après).
- ③ Effectuer l'approximation dipolaire traduisant le fait que  $M$  est très éloigné de la distribution, puis effectuer le développement limité du potentiel dans cette approximation.
- ④ Identifier l'expression du potentiel trouvée en ③ à celle du dipôle électrostatique. Conclure sur la possibilité d'équivalence de la distribution à un dipôle.
- ⑤ Dans le cas où la charge totale est nulle, vérifier la cohérence du résultat en calculant  $\sum_i q_i \vec{a}_i$ .  
Si  $\sum_i q_i \vec{a}_i \neq \vec{0}$ , alors  $\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{p}$ .

#### → Application

Soit les points A, B et O tels que :  $AO = OB = a$ .

Soit une distribution de charges telle que les points A et B portent chacun la charge  $+q$  et que le point O porte la charge  $-2q$  (figure ci-contre).

Montrer qu'un point éloigné M situé sur l'axe  $(Oz)$  voit cette distribution comme un dipôle dont on donnera le moment dipolaire  $p$ .



#### Solution

- ① La charge totale est nulle. L'équivalence avec un dipôle est possible.
- ② Le potentiel est nul à l'infini et on le calcule au point M en superposant les potentiels créés par chacune des charges ponctuelles placées en A, O et B :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 OM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

Or  $OM = |z|$  et  $AM = BM = \sqrt{a^2 + z^2}$ , de sorte que :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{|z|} \right)$$

- ③ Lorsque le point M est « éloigné » du dipôle, on peut écrire :  $|z| \gg a$ , soit  $\frac{a}{|z|} \ll 1$ .

En factorisant par  $\frac{1}{|z|}$ , le terme  $\frac{a}{|z|}$  apparait dans l'expression du potentiel et un développement limité est alors possible :

$$V(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0|z|} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} - 1 \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0|z|} \left( \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 1 \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0|z|} \left( 1 - \frac{a^2}{2z^2} + 1 \right)$$

$$V(M) = \frac{-qa^2}{4\pi\epsilon_0|z|z^2}.$$

④ Ce potentiel  $V(M)$  est proportionnel à  $\frac{1}{z^3}$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{r^3}$ , où  $r = OM$ .

Or le potentiel créé par un dipôle est proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$ , donc cette distribution n'est pas équivalente à un dipôle.

⑤ À titre de vérification, on calcule :

$$\sum_i q_i \vec{a}_i = q\vec{OA} - 2q\vec{OO} + q\vec{OB} = q(\vec{OA} + \vec{OB}) = \vec{0}.$$

Nous nous trouvons dans le cas où l'équivalence à un dipôle n'est pas possible.



Pour savoir si l'équivalence à un dipôle est possible, il est bien plus rapide de calculer la charge totale  $Q$ , puis  $\sum_i q_i \vec{a}_i$ .

Alors la distribution est équivalente à un dipôle si et seulement si  $q = 0$  et  $\sum_i q_i \vec{a}_i \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, le moment dipolaire équivalent est  $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i$ .

Cette démarche, plus rapide, n'est pas exigible en première année (libellé du programme officiel).

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Étude des positions « de Gauss »

Quelles sont les positions pour lesquelles le champ  $\vec{E}$  créé par un dipôle a la même direction que le moment dipolaire  $\vec{p}$ ? Pour chacune de ces positions, donner son expression.

### Ex. 2 Dans une molécule d'eau

La molécule d'eau, plane, peut être modélisée par un atome d'oxygène O portant la charge  $-2e$  auquel sont reliés deux atomes d'hydrogène H de charge  $+e$ . Si  $\alpha$  est l'angle entre les deux liaisons O-H et  $d$  la distance qui sépare un atome H de l'atome O, alors déterminer l'expression du moment dipolaire de la molécule d'eau. Faire l'application numérique.

Données :

$$a = 0,952 \text{ \AA} ;$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} ;$$

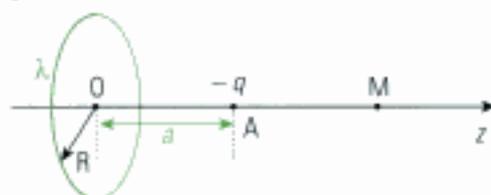
$$\alpha = 104^\circ 45'.$$



## Niveau 2

### Ex. 3 Distribution linéique circulaire

Un cerceau circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ , est chargé avec une densité linéique  $\lambda$ . Une charge ponctuelle  $-q$  se trouve en un point  $A$  tel que  $\vec{OA} = a\vec{u}_z$ , avec  $a > 0$  et du même ordre de grandeur que  $R$ .



1) Déterminer la valeur que doit avoir la densité  $\lambda$  pour que la charge du cerceau soit égale à  $q$ .

2) Calculer le potentiel  $V(M)$  créé par cet ensemble de charges en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  en fonction notamment de sa cote  $z$ . On prendra ce potentiel nul à l'infini.

3) Lorsque le point  $M$  est éloigné de la distribution, montrer que le potentiel  $V(M)$  qu'elle crée est équivalent à celui d'un dipôle dont on donnera l'expression du moment dipolaire  $p$  en fonction de  $R$ ,  $q$  et  $a$ .

### Ex. 4 Un dipôle électrostatique

Soit deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$  placées respectivement en  $A$  et  $B$ , l'origine  $O$  du repère étant

choisie au milieu de  $A$  et  $B$ . On note  $AB = d$ . On s'intéresse au champ et au potentiel  $V(M)$  créés en un point  $M$  éloigné de  $O$  par cette distribution de charges.

1) Rappeler les expressions du potentiel  $V$  et du champ  $\vec{E}$  électrostatiques créés par ce dipôle en un point  $M$ . On prendra le potentiel nul à l'infini.

2) Ce dipôle se trouve plongé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  parallèle au moment dipolaire et de même sens. Le potentiel  $V_0$  de ce champ électrostatique extérieur est nul au point  $O$ . Pour l'ensemble constitué par le dipôle et le champ extérieur, quelle est l'équipotentielle  $V = 0$ ?

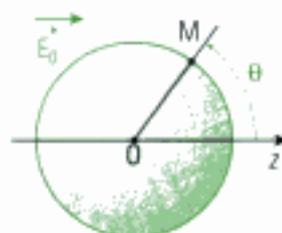
3) Montrer que le champ électrostatique total est perpendiculaire à cette équipotentielle.

4) Quelle est l'équation d'une équipotentielle de potentiel non nul? Conclure.

## Niveau 3

### Ex. 5 Les sphères métalliques

On étudie ici le modèle dit « des sphères métalliques » ou « des sphères dures ». Ce modèle permet d'expliquer l'apparition de moments dipolaires dans la matière lorsque celle-ci se trouve plongée dans un champ extérieur statique  $\vec{E}_0$



(que nous supposons uniforme) porté par un axe  $(x'z)$ . Une molécule est donc modélisée par une sphère conductrice (métallique) de rayon  $a$  et de centre  $O$ .

Une étude des conducteurs en équilibre montre que le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul et que pour que cette condition soit réalisée, des charges électriques apparaissent sur sa surface (uniquement) de manière à annuler le champ en tout point de son intérieur.

1) Montrer qu'en un point  $M$  de la surface de la sphère, la densité de charges superficielles qui apparaît ne dépend que de l'angle  $\theta$  défini sur la figure.

2) On suppose que cette densité est de la forme :

$$\sigma(\theta) = K \cos \theta.$$

On considère une bande (en forme de couronne) d'épaisseur angulaire  $d\theta$  et « centrée » sur le point  $M$ . Quelle est la surface  $dS$  de cette bande?

3) Déterminer la direction du champ  $d\vec{E}_1$  créé au point  $O$  par cette bande, puis l'expression de ce champ élémentaire.

- 4) Calculer le champ  $\vec{E}_1$  créé au point O par la distribution de charges superficielles.
- 5) En déduire la valeur de la constante K en supposant que la distribution crée un champ uniforme à l'intérieur de la sphère.
- 6) Faire un schéma de la sphère en indiquant le signe de la distribution superficielle aux différents endroits où elle existe.
- 7) Vue de l'extérieur et à grande distance, cette sphère apparaît comme un dipôle électrostatique dont on voudrait exprimer le moment dipolaire.

a) Montrer que les barycentres respectifs A et B des charges négatives ou positives se trouvent sur l'axe (Oz).

b) Exprimer la charge élémentaire positive  $dq$  se trouvant sur une couronne comprise entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .

En déduire la charge positive totale Q.

c) Déterminer les positions de A et B et, par suite, l'expression du moment dipolaire du dipôle équivalent.

## Indications

### Ex. 2

Penser au principe de superposition.

### Ex. 3

Faire un développement limité du potentiel avec  $z \gg a$  et R.

### Ex. 4

Les potentiels, comme les champs, se superposent.

### Ex. 5

- 3) C'est le champ créé par un cerceau.
- 4) Il s'agit de sommer.
- 5) Les champs se superposent.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

Les composantes du champ  $\vec{E}$  s'écrivent en coordonnées polaires :

$$E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

sachant que le moment dipolaire est  $\vec{p} = p\vec{u}_x$ .

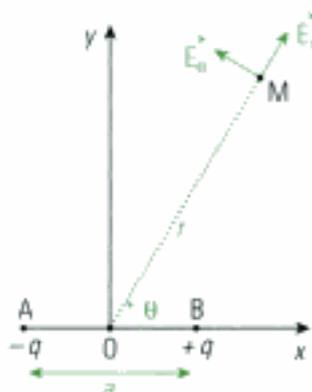
Il faut donc que la composante selon (Oy) du champ électrostatique soit nulle :

$$E_y = E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta = \frac{2p \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{p \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3p \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 0,$$

$E_y = 0$  équivaut donc à  $\sin\theta \cos\theta = 0$ , soit :  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

Le champ  $\vec{E}$  est donc colinéaire à  $\vec{p} = p\vec{u}_x$  en tout point des deux axes de coordonnées. Comme le dispositif est invariant par rotation autour de l'axe (Ox), le champ  $\vec{E}$  aussi. Il garde donc la direction de (Ox) dans le plan (Oyz) et sur l'axe (Ox).

Dans le plan (Oyz),  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $\vec{E} = \pm \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_x$ ; sur l'axe (Ox),  $\theta = 0$  ou  $\pi$  et  $\vec{E} = \pm \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_x$ .



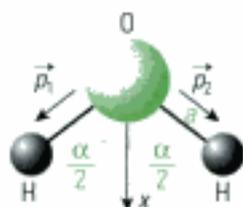
### Exercice 2

On peut appliquer le principe de superposition : la molécule d'eau contient les deux moments dipolaires  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , symétriques par rapport à l'axe (Ox). La somme  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  est donc dirigée selon cet axe et on peut écrire le moment dipolaire total :  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = p\vec{u}_x$ .

Comme  $p_1 = p_2 = ea$ , on a :

$$p = 2ea \cos \frac{\alpha}{2}.$$

A. N.  $p = 1,86 \cdot 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$  ou  $p = 5,58 \text{ D}$ .



## Exercices de niveau 2

### Exercice 3

1) La densité  $\lambda$  est uniforme, donc la charge du cerceau s'écrit :

$$q = \int_{\text{cerceau}} \lambda dl = \lambda \int_{\text{cerceau}} dl = 2\pi R \lambda.$$

Son expression est donc  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$  et la charge du cerceau vaut  $q$ .

2) Le potentiel total  $V(M)$  en un point  $M$  est la somme du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle et de celui créé par un cerceau chargé avec la densité linéique  $\lambda$ .

• Le potentiel électrostatique  $V^-$  au point  $M$  créé par la charge ponctuelle  $-q$  placée en  $A$  est, compte tenu qu'il est pris nul à l'infini :

$$V^- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM}, \text{ avec } AM = |z - a|.$$

• Le potentiel électrostatique  $V^+$  au point  $M$  créé par le cerceau chargé a été calculé dans l'exercice n° 2 du chapitre 3, le potentiel nul étant pris à l'infini :

$$V^+ = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}},$$

avec le centre du cerceau à l'origine  $O$  de l'axe  $(Oz)$  et  $M$  de cote  $z$ .

Le potentiel électrostatique total  $V$  en  $M$  créé par le cerceau de charge  $q$  et la charge  $-q$  placée en  $A$  est la superposition des deux potentiels précédents :

$$V = V^+ + V^- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 |z - a|}.$$

3) Lorsque le point  $M$  est éloigné, on a  $|z| \gg a$  et  $|z| \gg R$ .

On peut donc effectuer des développements limités en faisant apparaître  $\frac{R}{z} \ll 1$  et  $\frac{a}{z} \ll 1$  :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} - \frac{1}{|1 - \frac{a}{z}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \right),$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \left[ \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \left[ \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} - \left(1 + \frac{a}{z}\right)\right) \right] = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 |z| z},$$

On a en effet négligé le terme d'ordre 2 en  $\frac{R}{z} \ll 1$  devant celui d'ordre 1 en  $\frac{a}{z} \ll 1$ , vu que  $R$  et  $a$  sont du même ordre de grandeur.

Donc lorsque  $z > 0$  :

$$V = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 z^2},$$

et lorsque  $z < 0$  :

$$V = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 z^2}.$$

Ce potentiel est en  $\frac{1}{z^2}$ , où  $|z|$  représente la distance  $OM$ , ressemblant à celui créé par un dipôle électrostatique à la distance  $r$  et qui est en  $\frac{1}{r^2}$ , puisque son expression est  $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

On identifie alors  $r^2$  à  $z^2$  ; le dipôle équivalent est placé en  $O$ . Si le moment dipolaire équivalent est  $\vec{p} = q \vec{AO}$ , alors  $\vec{p} \cdot \vec{OM} = -qaz$  et on peut écrire  $V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$  qui est l'expression d'un dipôle de moment  $\vec{p} = q \vec{AO}$  et placé en  $O$ .

Lorsque  $z > 0$ , on a  $\theta = \pi$  donc  $\cos \theta = -1$ , et lorsque  $z < 0$ , on a  $\theta = 0$  donc  $\cos \theta = 1$ . Les expressions du potentiel trouvées précédemment sont donc cohérentes avec l'équivalence à un dipôle qui a été trouvée.



On pouvait plus rapidement constater cette équivalence, sans avoir à calculer l'expression simplifiée du potentiel. En effet, le barycentre  $G$  des charges positives se trouve au point  $O$ .

$\sum_i q_i \vec{a}_i = \sum_i q_i \vec{OG}_i = q \vec{OG}$  définit le barycentre G des charges  $q_i$ , et tout se passe comme si G portait la charge totale  $q$ . Pour le cerceau, la sommation est continue, ce qui revient à remplacer le symbole d'addition « discrète », c'est-à-dire le symbole de sommation sur un nombre entier, par un symbole d'intégration, qui représente une somme continue.

Le moment dipolaire vaut alors  $\vec{p} = qA\vec{O}$ , car le point A porte la charge  $-q$  et O la charge  $+q$ , ce qui constitue un dipôle pour un point M placé à grande distance.

#### Exercice 4

1) En coordonnées polaires, le potentiel créé en un point M par un moment dipolaire  $\vec{p} = p\vec{u}_x$  vaut :

$$V(M) \approx \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Le champ électrostatique correspondant à l'expression suivante (dédue de celle du potentiel) :

$$\vec{E} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta.$$

2) On cherche la nature de l'équipotentielle  $V = 0$ . Il est donc nécessaire de calculer l'expression du potentiel électrostatique  $V_0$  associé au champ extérieur  $\vec{E}_0$ .

On a :

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x = -\text{grad}V_0.$$

En coordonnées cartésiennes (les lignes de champ du champ  $\vec{E}_0$  en ont la géométrie), on déduit :

$$E_0 = -\frac{\partial V_0}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{\partial V_0}{\partial z}.$$

Les deux dernières équations montrent que  $V_0$  ne dépend que de  $x$  et la première s'intègre en :

$$V_0 = -E_0 x + \text{cte},$$

la constante étant déterminée par la position de l'origine des potentiels pour  $V_0$ .

$V_0 = 0$  lorsque  $x = 0$ , soit  $0 = \text{cte}$  et finalement :

$$V_0 = -E_0 x.$$

Le potentiel électrostatique total en un point M est la somme du potentiel créé par le dipôle et de celui associé au champ extérieur  $\vec{E}_0$  (créé par les sources du champ extérieur) :

$$V(M) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 x = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos\theta, \text{ car } x = r \cos\theta.$$

On peut maintenant déterminer l'équipotentielle  $V = 0$ , donnée par l'équation :

$$V(M) = 0 = \cos\theta \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right), \text{ soit } \cos\theta = 0 \text{ ou } r^3 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}.$$

Dans le plan (Oxy) dans lequel l'étude est faite, il s'agit respectivement de l'axe (Oy) (pour tout point de cet axe, on a  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ) et du cercle de rayon :

$$r = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}.$$

Les surfaces équipotentielles correspondantes dans l'espace sont obtenues en se servant de l'invariance du dispositif (dipôle et champ extérieur) par rotation autour de l'axe (Ox).

La rotation autour de (Ox) de l'axe (Oy) génère le plan (Oyz) et celle du cercle de centre O et de rayon  $r = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$  génère la sphère de même centre et de même rayon.

L'équipotentielle  $V = 0$  est donc formée par le plan  $(Oyz)$  et la sphère de centre  $O$  et de rayon

$$r = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}.$$

3) Exprimons le champ total, qui est la somme du champ extérieur et de celui créé par le dipôle.

$$\vec{E} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta + E_0 \vec{u}_x, \text{ avec } \vec{u}_x = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta, \text{ d'où :}$$

$$\vec{E} = \left( \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \cos\theta \right) \vec{u}_r + \left( \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \sin\theta \right) \vec{u}_\theta.$$

Pour un point de l'axe  $(Oy)$ , on a  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $E_r = 0$ . Or  $\vec{u}_\theta = \pm \vec{u}_x$ , donc le champ est orthogonal à l'axe. Ce résultat peut être généralisé à tout point du plan  $(Oyz)$  en appliquant l'invariance par rotation autour de  $(Ox)$ .

Pour un point du cercle de rayon  $r = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$ , on vérifie  $E_\theta = 0$ .

Le champ est radial et donc orthogonal au cercle centré sur  $O$ . On généralise ce résultat pour tout autre point de la sphère en utilisant l'invariance par rotation autour de  $(Ox)$ .

4) Une équipotentielle  $V \neq 0$  a pour équation :

$$V = \cos\theta \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) = \cos\theta f(r).$$

Dans le plan  $(Oxy)$ , cette équation correspond à des courbes en coordonnées polaires très difficiles à tracer. On remarque que la fonction :

$$f(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r,$$

est une fonction décroissante de  $r$ .

Lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $f(r) \rightarrow -\infty$  et il faut  $\cos\theta = 0$ , soit  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ; les courbes ont pour asymptote l'axe  $(Oy)$  et les équipotentielles « partent à l'infini ».

Lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $f(r) \rightarrow +\infty$  et il faut aussi  $\cos\theta = 0$ , soit  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ; les courbes passent par  $O$  et sont tangentes à  $(Oy)$  en au point  $O$ .

## Exercice de niveau 3

### Exercice 5

1) Dans le système de coordonnées sphériques d'origine  $O$ , centre de la sphère, et d'axe  $(Oz)$ , direction du champ électrostatique extérieur, la densité de charges surfaciques  $\sigma$  dépend des trois coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .

Or pour tout point de la sphère,  $r = R$  et reste constant.

De plus, la sphère et le champ électrostatique extérieur sont invariants par rotation autour de  $(Oz)$ . Donc la densité  $\sigma$  aussi.

Cette rotation concerne l'angle  $\phi$ , donc  $\sigma$  ne dépend pas de  $\phi$  et n'est finalement qu'une fonction de  $\theta$ .

2) On considère l'élément de surface  $dS$  correspondant à une variation des deux angles, en coordonnées sphériques :

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi.$$

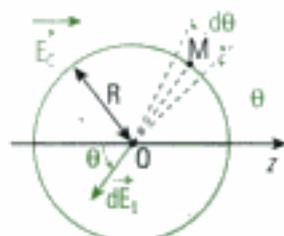
La bande concernée est obtenue en faisant tourner l'élément de surface autour de l'axe (Oz), c'est-à-dire en intégrant sur  $\phi$  de 0 à  $2\pi$  :

$$dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta.$$

3) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie pour le dispositif entier ; en tout point de l'axe, le champ électrostatique est dirigé selon l'axe. La couronne étudiée étant inchangée par cette symétrie, le champ élémentaire qu'elle crée est dirigé selon (Oz) :

$$d\vec{E}_1 = dE_1 \vec{u}_z.$$

Chacun des éléments de la couronne crée un champ élémentaire  $d\vec{E}_1$  en O faisant l'angle  $\theta$  avec (Oz), chaque charge élémentaire se trouvant à la même distance R de O. Donc  $d\vec{E}_1$  est obtenu en ajoutant toutes les projections sur (Oz) des champs élémentaires. Tout se passe comme s'il fallait projeter sur (Oz) le champ créé par la charge totale de la couronne et faisant l'angle  $\theta$  avec (Oz) :



$$dE_1 = -\frac{\sigma(\theta)dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = -\frac{K\cos\theta 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = -\frac{K\cos^2\theta \sin\theta d\theta}{2\epsilon_0}.$$

4) On effectue la somme des champs créés par toutes les couronnes, soit l'intégrale de 0 à  $\pi$  sur la variable  $\theta$  des champs  $dE_1$  :

$$E_1 = \int_{M \in \text{sphère}} dE_1 = -\frac{K}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -\frac{K}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta d(-\cos\theta) = -\frac{K}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = -\frac{K}{3\epsilon_0};$$

soit  $\vec{E}_1 = \frac{K}{3\epsilon_0} (-\vec{u}_z).$

En effet, on a vu que la projection sur l'axe du champ élémentaire était négative, c'est-à-dire dans le sens de  $-\vec{u}_z$ .

5) La sphère étant conductrice, le champ électrostatique doit être nul en chacun de ses points, notamment en O.

Or le champ électrostatique total est la superposition du champ extérieur et de celui créé par la densité surfacique. On écrit donc :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_0 = \vec{0}, \text{ soit } E_0 - \frac{K}{3\epsilon_0} = 0, \text{ et donc } K = 3\epsilon_0 E_0.$$

6) Sur la figure ci-contre, on voit que lorsque  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , on a :

$$\cos\theta > 0 \text{ et par suite } \sigma(\theta) > 0.$$

Cela correspond à la partie de la sphère se trouvant à droite du point O sur la figure.

7) a) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie pour le dispositif entier : les barycentres des charges positives ou négatives se trouvent sur l'axe (Oz).

b) La charge  $dq$  se trouvant dans la couronne d'épaisseur  $d\theta$  est  $dq = \sigma dS$ , où  $dS$  est la surface de cette couronne élémentaire, soit :

$$dq = \sigma(\theta)dS = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \times 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \cos\theta \sin\theta d\theta.$$

La charge positive totale est la somme de toutes les charges élémentaires, à condition qu'elles restent positives.

Il faut donc intégrer sur  $\theta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  :

$$Q = \int_{\theta=0}^{\pi/2} dq = 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta) = 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \left[ \frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2},$$

$$Q = 3\pi R^2 \epsilon_0 E_0.$$

c) On détermine d'abord la position du barycentre B des charges positives. On note P le point de l'axe centré sur la couronne d'épaisseur  $dq$  et repérée par l'angle  $\theta$ . Ce point P est le barycentre de la couronne, sa cote est  $z = R\cos\theta$  et tout se passe comme s'il portait la charge :

$$dq = \sigma(\theta)dS = 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \cos\theta \sin\theta d\theta.$$

Le barycentre B des points P est défini par la relation :

$$Q \vec{OB} = \int dq \vec{OP} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} 6\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \cos\theta \sin\theta d\theta \times R\cos\theta \vec{u}_z = 6\pi R^3 \epsilon_0 E_0 \vec{u}_z \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta,$$

$$Qz_B = 6\pi R^3 \epsilon_0 E_0 \left[ -\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi R^3 \epsilon_0 E_0, \text{ avec } Q = 3\pi R^2 \epsilon_0 E_0 ;$$

$$z_B = \frac{2R}{3}.$$

Pour déterminer la position du point A, on utilise les propriétés de symétrie (ou plutôt d'antisymétrie) du dispositif. La distribution de charges est transformée en son opposée par symétrie par rapport au plan  $(Oxy)$ .

Comme A porte la charge  $-Q$  et B la charge  $Q$ , on déduit de l'antisymétrie de la distribution que A et B sont symétriques. Ainsi :

$$z_A = -\frac{2R}{3} \text{ et } \vec{AB} = \frac{4R}{3} \vec{u}_z,$$

et le moment dipolaire s'écrit :

$$\vec{p} = Q \vec{AB} = 3\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \frac{4R}{3} \vec{u}_z.$$

# Analogie avec la gravitation

## Introduction

Ce chapitre pose les correspondances entre les charges électriques et les masses, afin de pouvoir traiter les problèmes d'interaction gravitationnelle à l'aide des mêmes méthodes que pour les problèmes d'électrostatique. Le champ gravitationnel et l'énergie potentielle gravitationnelle sont ainsi définis, par analogie mathématique, avec les mêmes expressions que le champ électrostatique et l'énergie potentielle électrostatique, à condition d'effectuer un changement de constantes que l'on précise.

### Plan du chapitre 5

#### A. Correspondances mathématiques

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Interaction fondamentale .....                         | 116 |
| 2. Grandeurs équivalentes .....                           | 116 |
| 3. Différences entre électrostatique et gravitation ..... | 117 |

#### B. Le champ gravitationnel

- |  |     |
|--|-----|
| 1. Champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle. ....                  | 118 |
| 2. Champ gravitationnel créé par plusieurs masses ponctuelles. ....          | 118 |
| 3. Champ gravitationnel créé par une distribution linéique de masses .....   | 118 |
| 4. Champ gravitationnel créé par une distribution surfacique de masses ..... | 119 |
| 5. Champ gravitationnel créé par une distribution volumique de masses .....  | 119 |
| 6. Calcul direct du champ gravitationnel .....                               | 119 |

#### C. Existence et continuité du champ gravitationnel. ....

119

#### D. Topographie du champ gravitationnel

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Considérations de symétrie .....  | 120 |
| 2. Considérations d'invariance ..... | 120 |

#### E. Théorème de Gauss. ....

121

#### F. Potentiel gravitationnel .....

122

#### G. Énergie potentielle gravitationnelle

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Travail de la force gravitationnelle .....                         | 122 |
| 2. Énergie potentielle d'interaction de deux masses ponctuelles ..... | 123 |

#### Méthodes

- |                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| L'essentiel ; mise en œuvre. .... | 125 |
|-----------------------------------|-----|

#### Énoncés des exercices .....

130

#### Indications .....

131

#### Solutions des exercices .....

132

# A. Correspondances mathématiques

## A.1. Interaction fondamentale

• En électrostatique, la loi de Coulomb décrit l'interaction entre deux charges électriques ponctuelles immobiles dans le vide (fig. 1). Énoncée dans le chapitre 1, on en rappelle l'expression :

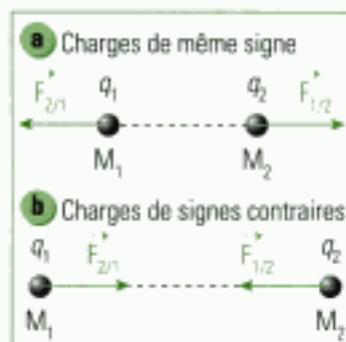


Fig. 1 - Forces de Coulomb de deux charges ponctuelles.

### Loi 1

#### Loi de Coulomb

La force  $\vec{F}_{1/2}$  exercée par la charge ponctuelle  $q_1$  sur la charge ponctuelle  $q_2$  a pour expression :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{1/2}$ force en newton (N)
$q_1$ et $q_2$ charges en coulomb (C)
$r_{12} = M_1 M_2$ distance en mètre (m)
$\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ vecteur unitaire (sans dimension)

La constante  $k$  dépend du milieu. Dans le vide, elle vaut :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI,}$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide ;  $k$  se mesure en  $\text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-2}$ .

Le vecteur unitaire  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$  est orienté de  $M_1$  vers  $M_2$  sur la droite  $(M_1 M_2)$ .

• Pour décrire l'interaction entre les masses, la loi de la gravitation universelle donne la force d'interaction entre deux masses ponctuelles (fig. 2). Soit la masse  $m_1$  placée au point  $M_1$  et la masse  $m_2$  placée au point  $M_2$ .

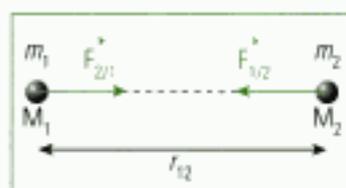


Fig. 2 - Forces d'interaction de deux masses ponctuelles.

### Loi 2

#### Loi de la gravitation universelle

La force  $\vec{F}_{1/2}$  exercée par la masse ponctuelle  $m_1$  sur la masse ponctuelle  $m_2$  a pour expression :

$$\vec{F}_{1/2} = -K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\vec{F}_{1/2}$ force en newton (N)
$m_1$ et $m_2$ masses en kilogrammes (kg)
$r_{12} = M_1 M_2$ distance en mètre (m)
$\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ vecteur unitaire (sans dimension)

La constante  $K$  est la constante de gravitation universelle. Elle vaut :

$$K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.,}$$

son unité exacte étant le  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ .

Le vecteur unitaire  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$  est orienté de  $M_1$  vers  $M_2$  sur la droite  $(M_1 M_2)$ .

## A.2. Grandeurs équivalentes

Les deux interactions, force de Coulomb et force de gravitation, sont mathématiquement identiques et on peut établir un tableau de correspondances entre les grandeurs utilisées en électrostatique et les grandeurs utilisées en mécanique.

Électrostatique		Gravitation	
Charge	$q$	Masse	$m$
Constante	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante	$-K$

### A.3. Différences entre électrostatique et gravitation

- Alors que la charge électrique peut être positive ou négative, la masse reste positive.
- Lorsque deux charges électriques sont de même signe, la force de Coulomb est répulsive, alors que la force de gravitation qui décrit l'interaction de deux masses est attractive.
- On peut cependant conserver les mêmes expressions vectorielles, à condition de remplacer la constante positive  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  de la force de Coulomb par la constante  $-K$  négative de la force de gravitation. Les lois de similitude sont alors complètes, dans la mesure où elles peuvent être appliquées<sup>1</sup>.

1. Les dispositifs électrostatiques comme le dipôle ou le condensateur font nécessairement intervenir des charges électriques des deux signes : ils ne possèdent donc pas d'équivalent gravitationnel, vu qu'il n'existe pas de masse négative.

## B. Le champ gravitationnel

- Comme la définition du champ électrostatique découle de la force de Coulomb, un champ gravitationnel équivalent pourra être défini à partir de la force de gravitation. On rappelle la définition du champ électrostatique :

#### Définition 1

Si une particule ponctuelle de charge  $q$  est immobile en un point  $M$  et s'y trouve soumise à une force  $\vec{F}$ , autre que son poids, qui s'annule lorsque  $q$  s'annule, alors il existe au point  $M$  un champ électrostatique  $\vec{E}$  défini par la relation :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$\vec{F}$  force en newton (N)  
 $q$  charge en coulomb (C)  
 $\vec{E}$  champ électrostatique ( $N \cdot C^{-1}$  ou  $V \cdot m^{-1}$ )

On procède par équivalence pour donner la définition du champ gravitationnel.

#### Définition 2

Si une masse ponctuelle  $m$  non chargée est immobile en un point  $M$  et s'y trouve soumise à une force  $\vec{F}$ , alors il existe au point  $M$  un champ gravitationnel  $\vec{G}$  défini par la relation :

$$\vec{F} = m\vec{G}$$

$\vec{F}$  force en newton (N)  
 $m$  masse en kilogramme (kg)  
 $\vec{G}$  champ gravitationnel ( $N \cdot kg^{-1}$  ou  $m \cdot s^{-2}$ )

Le champ gravitationnel est homogène à une accélération et se mesure donc en  $m \cdot s^{-2}$ .

## B.1. Champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle



Fig. 3 - Champ gravitationnel créé au point M par la masse  $m$  placée au point P.

Cette première expression découle directement de la force de gravitation, donc de la définition du champ. Une masse ponctuelle  $m'$  placée en M subit de la part d'une masse ponctuelle  $m$  placée en P la force de gravitation (fig. 3) :

$$\vec{F} = -K \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_{PM} = -K mm' \frac{\vec{PM}}{PM^3} = m' \vec{G}.$$

Ainsi, en tenant compte de la définition 2, on peut déduire :

### Loi 3

Une masse ponctuelle  $m$  placée au point P crée en un point M, situé à une distance  $r$  de P, le champ gravitationnel :

$$\vec{G} = \frac{-K m}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{G}$  champ gravitationnel ( $m \cdot s^{-2}$ )  
 $K$  constante  
 $m$  masse en kilogramme (kg)  
 $r$  distance (m)

où  $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de P vers M.

## B.2. Champ gravitationnel créé par plusieurs masses ponctuelles

On applique le théorème de superposition en ajoutant les différents champs gravitationnels qu'exercent chacune des  $N$  masses indicées  $i$  et placées respectivement en des points  $P_i$  au point M.

### Loi 4

#### Théorème de superposition

Les  $N$  masses  $m_i$  et placées respectivement en des points  $P_i$  créent au point M le champ de gravitation :

$$\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{-K m_i}{r_i^2} \vec{u}_i,$$

où  $\vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\vec{P_i M}}{P_i M}$  est le vecteur unitaire de la droite  $(P_i M)$  dirigé de  $P_i$  vers M.

## B.3. Champ gravitationnel créé par une distribution linéique de masses

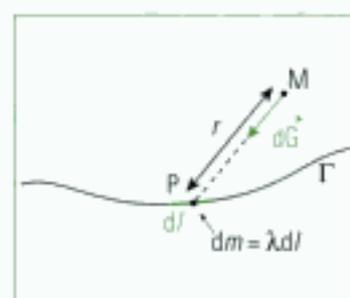


Fig. 4 - Cas d'une distribution linéique de masses.

Les masses sont disposées sur une ligne  $\Gamma$  avec la densité linéique  $\lambda$ . Chaque élément  $dl$  de la ligne de centre P est quasi ponctuel et crée un champ élémentaire  $d\vec{G}$  au point M (fig. 4). Le champ total créé au point M est la somme (c'est-à-dire l'intégrale pour une sommation qui, ici, est continue) de tous ces champs élémentaires créés par les points P de la ligne  $\Gamma$ .

### Loi 5

Le champ de gravitation créé au point M par les points P d'une distribution linéique de masses le long de la ligne  $\Gamma$  s'écrit :

$$\vec{G}(M) = \int_{\Gamma} d\vec{G} = \int_{P \in \Gamma} \frac{-K dm}{r^2} \vec{u} = \int_{P \in \Gamma} \frac{-K \lambda dl}{r^2} \vec{u},$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  est le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de P vers M.

Hidden page

#### Loi 8

Le champ gravitationnel n'est pas défini sur les masses ponctuelles (il est donc discontinu en ces points), mais reste défini et continu partout ailleurs.

- Le champ gravitationnel n'est pas défini (donc ni continu) aux points où se trouvent des masses linéiques.
- Lorsque la distribution de masses est surfacique, le champ gravitationnel n'est pas défini sur la surface ; il est donc discontinu à la traversée de la surface.

#### Loi 9

Lorsque les masses sont volumiques, le champ gravitationnel est défini et continu en tout point de l'espace.

## D. Topographie du champ gravitationnel

Les considérations qui permettent de déterminer la direction du champ gravitationnel  $\vec{G}$  et les variables dont dépend son module sont analogues à celles développées en électrostatique.

### D.1. Considérations de symétrie

Le champ de gravitation, proportionnel à la force, est un vrai vecteur, comme le champ électrostatique.

Soit  $\pi$  un plan de symétrie<sup>2</sup> pour la distribution de masses considérée.

- Le champ de gravitation en un point  $M$  du plan  $\pi$  est inclus dans  $\pi$ .

S'il existe un second plan de symétrie  $\pi'$  contenant le point  $M$ , alors le champ de gravitation est aussi inclus dans le plan  $\pi'$  et il vient les deux résultats suivants.

La direction du champ de gravitation en tout point  $M$  des deux plans  $\pi$  et  $\pi'$  de symétrie pour la distribution de masses est celle de la droite intersection de ces deux plans.

Si le point  $M$  ne fait pas partie du plan de symétrie  $\pi$  trouvé, alors aucune information sur la direction du champ ne peut être trouvée.

En effet, la seule conclusion est que le champ au symétrique  $M'$  du point  $M$  est le vecteur  $\vec{G}'$  symétrique du champ  $\vec{G}$  existant en  $M$  (fig. 7). Une argumentation de ce type permet de trouver la parité du champ de gravitation, une fois que l'on en connaît la direction.

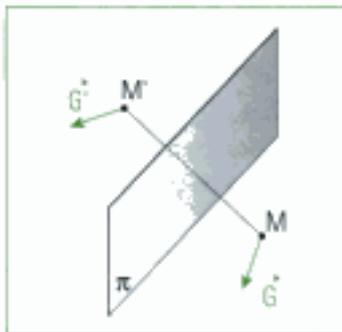


Fig. 7 -  $\pi$  est un plan de symétrie pour la distribution de masses (non représentée).

### D.2. Considérations d'invariance

#### D.2.1 – Rotations autour d'un axe

S'il existe un axe autour duquel une rotation d'angle  $\theta$  laisse invariant la distribution de masses (le point  $M$  n'étant pas nécessairement invariant lors de cette rotation), alors la valeur  $G$  du champ en  $M$  ne dépend pas de l'angle  $\theta$  de cette rotation (ou de la coordonnée d'espace correspondant à cet angle).

2. On ne peut pas parler de plan d'antisymétrie pour des distributions de masses, car il n'y a pas de masse négative.

3. Le mouvement étant relatif, on peut aussi dire que la rotation de M (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de masses « qu'il voit ». Donc la valeur du champ en M ne peut dépendre de l'angle qui définit cette rotation.

4. Il n'est pas nécessaire de connaître la direction du champ pour faire cette conclusion. C'est donc la valeur du champ qui ne dépend pas de  $\theta$ .

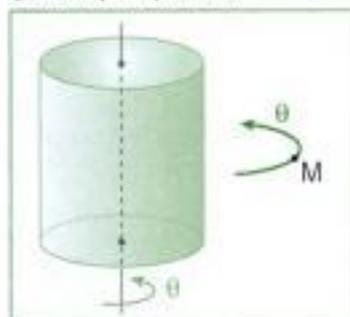


Fig. 8 - Invariance de la distribution par rotation.

5. On peut aussi dire que la translation du point M (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de masses qu'il « voit ». Donc la valeur G du champ au point M ne peut dépendre de la coordonnée qui définit cette translation.

6. Cette conclusion peut se faire même si on ne connaît pas la direction du champ au point M. C'est donc sa valeur G qui est indépendante de x.

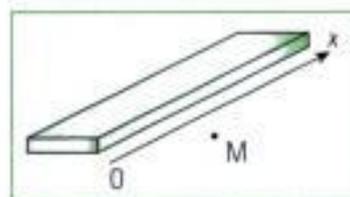


Fig. 9 - Invariance par translation de la distribution « infinie » pour le point M.

7. Ce modèle traduit physiquement le fait que la distance du point M aux charges est suffisamment petite devant la dimension de la distribution. Pour un observateur placé en M, la distribution paraît d'extension infinie.

En effet, un point M fixe « voit » alors la même distribution, alors que celle-ci a effectué une rotation<sup>3</sup>.

Sur l'exemple de la fig. 8, la distribution est cylindrique et elle reste invariante par toute rotation d'angle  $\theta$  autour de son axe de révolution. Donc le champ  $\vec{G}$  au point M ne dépend pas<sup>4</sup> de  $\theta$ .

### D.2.2. Translations

S'il existe une direction selon laquelle toute translation laisse invariante la distribution de masses (le point M n'étant pas nécessairement invariant par cette translation), alors la valeur du champ en M ne dépend pas de la variable d'espace qui définit la direction de cette translation.

En effet, un point M fixe « voit » alors la même distribution, alors que celle-ci a effectué une translation<sup>5</sup>.

Sur l'exemple de la fig. 9, on suppose que la distribution de masses est « infinie » dans la direction (Ox). Une translation selon (Ox) la laisse donc invariante. Donc le champ en M ne dépend pas<sup>6</sup> de x.

L'invariance par translation ne peut exister que lorsque la distribution de masses est illimitée<sup>7</sup> dans la direction de la translation. Lorsqu'il n'y a pas de masses « à l'infini », il ne peut y avoir aucune invariance par translation.

## E. Théorème de Gauss

• On considère une distribution de masses créant un champ de gravitation défini et continu dans tout l'espace où l'étude est effectuée (on n'effectue pas d'étude en des endroits où le champ de gravitation n'est pas défini).

On exprime le théorème de Gauss équivalent à celui vu en électrostatique.

#### Loi 10

#### Théorème de Gauss

Le flux  $\phi$  du champ de gravitation  $\vec{G}$  à travers toute surface fermée S est égal à la masse  $m_{\text{int}}$ , contenue dans le volume V délimité par S, multipliée par  $-4\pi K$ , où K est la constante de gravitation universelle :

$$\phi = \iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi K m_{\text{int}}$$

$\phi$  flux du champ gravitationnel en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$   
 K constante  
 $m_{\text{int}}$  masse en kilogrammes (kg)

On a remplacé, dans le théorème de Gauss vu en électrostatique, la quantité  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  par  $-K$ , soit  $\frac{1}{\epsilon_0}$  par  $-4\pi K$ .

• Les masses intérieures  $m_{\text{int}}$  créent en un point de la surface S un champ de gravitation dirigé vers elles (donc vers l'intérieur) et la normale à une surface fermée est sortante : il est logique que ce flux soit négatif. Cela conforte l'assurance que le remplacement de la constante  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  positive de la force de Coulomb par la constante  $-K$  négative est licite.

• On s'aperçoit de plus que les masses extérieures à la surface S créent un flux nul. Ce théorème est un outil de calcul extrêmement efficace pour calculer le champ de gravitation dans des situations de « haute symétrie ».

## F. Potentiel gravitationnel

Par analogie avec la notion de potentiel électrostatique, on peut définir le potentiel gravitationnel, qui se définit lui aussi à partir de la circulation conservative du champ associé.

- Alors que la signification du potentiel électrostatique est forte, celle du potentiel gravitationnel est moins évidente. On rappelle donc certains des résultats établis en électrostatique en se servant de l'analogie mathématique.
- Par analogie, la circulation  $C$  du champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle  $m$  placée en  $O$  entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  éloignés s'écrit, en notant  $r_1 = OM_1$  et  $r_2 = OM_2$  :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} dC = \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{-Km}{r}\right) = \frac{Km}{r_2} - \frac{Km}{r_1}.$$

Ce résultat traduit le fait que le champ de gravitation est à circulation conservative.

### Loi 11

Le champ de gravitation est à circulation conservative et on écrit :

$$\vec{G} = -\vec{\text{grad}}V.$$

La fonction potentiel gravitationnel  $V$  est définie par cette relation<sup>8</sup>.

La circulation du champ gravitationnel entre deux points  $A$  et  $B$  vaut :

$$\int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B dV = V(A) - V(B).$$

Le signe  $-$  devant le gradient est purement conventionnel.

On donne l'expression du potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle, obtenue par analogie :

$$V = \frac{-Km}{r} + \text{cte.}$$

8. En mécanique, on écrit qu'une force conservative  $\vec{F}$  a un travail qui ne dépend pas du chemin suivi, le travail d'une force étant la circulation de cette force. L'énergie potentielle  $E_p$  alors associée à la force a été définie par la relation  $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}E_p$ , analogue à celle définissant le potentiel.

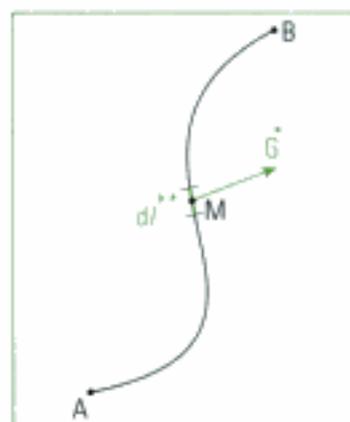


Fig. 10 - Travail de la force gravitationnelle pour le déplacement de  $A$  vers  $B$ .

9. Un déplacement spontané de la masse  $m$  est tel que le travail est positif (alors moteur).  $\vec{F}$  a le même sens que  $\vec{G}$  et le déplacement est spontané si  $V_A > V_B$  ; on retrouve le fait que le champ est dirigé vers les valeurs décroissantes de son potentiel.

## G. Énergie potentielle gravitationnelle

### G.1. Travail de la force gravitationnelle

On suppose qu'une masse ponctuelle  $m$  effectue un déplacement d'un point  $A$  à un point  $B$  en étant plongée dans un champ de gravitation extérieur non nécessairement uniforme.

Dans un déplacement  $d\vec{l}$  infinitésimal, le champ de gravitation extérieur reste uniforme et le travail élémentaire  $dW$  de la force de gravitation  $\vec{F} = m\vec{G}$  subie par la masse  $m$  vaut (fig. 10) :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m\vec{G} \cdot d\vec{l}.$$

Or  $\vec{G} = -\vec{\text{grad}}V$ , donc  $dW = -m\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -\vec{\text{grad}}(mV) \cdot d\vec{l}$ .

Le travail de la force de gravitation pour le déplacement de la masse  $m$  de  $A$  à  $B$  est la somme des travaux élémentaires lors des trajets constituant le parcours de  $A$  vers  $B$  :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B -\vec{\text{grad}}(mV) \cdot d\vec{l} = [-mV]_A^B = m(V_A - V_B).$$

**Loi 12**

La force de gravitation est conservative : son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Elle dérive d'une énergie potentielle  $E_p = mV + \text{cte}$ , où cte est une constante et l'on écrit<sup>10</sup> :

$$\vec{F} = - \vec{\text{grad}}E_p = - \vec{\text{grad}}(mV + \text{cte})$$

$\vec{F}$  force en newton (N)

$E_p$  énergie potentielle en joule (J)

$m$  masse en kilogramme (kg)

$V$  potentiel en volt (V)

10. L'obtention de cette énergie potentielle est celle qui a introduit l'énergie potentielle en mécanique. On note que cette énergie n'est définie qu'à partir de sa dérivée, donc qu'elle n'est définie qu'à une constante additive près.

## G.2. Énergie potentielle d'interaction de deux masses ponctuelles

Lorsque des masses se trouvent à proximité les unes des autres pour former une distribution, chacune est plongée dans le champ de gravitation des autres. Lorsque cette distribution a été rassemblée, les forces de gravitation exercées par les masses sur les autres masses ont travaillé dans le rapprochement de ces masses. On introduit donc le concept d'énergie potentielle gravitationnelle à partir du travail de la force de gravitation.

### G.2.1 – Énergie d'une charge dans le champ de l'autre

Soit deux masses  $m_1$  et  $m_2$  se trouvant en deux points  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $M_1M_2 = r_{12}$ .

• La charge  $m_1$  est alors plongée dans le champ de gravitation  $\vec{G}$  créé par l'autre masse  $m_2$ . Elle possède donc l'énergie potentielle  $E_{p1} = m_1V_2$ , où  $V_2$  désigne le potentiel du champ  $\vec{G}_2$ . Ce potentiel étant créé par une masse ponctuelle, il s'écrit<sup>11</sup> :

$$V_2 = \frac{-Km_2}{r_{12}}$$

L'énergie potentielle de la masse  $m_1$  s'écrit alors :

$$E_{p1} = \frac{-Km_1m_2}{r_{12}}$$

• La symétrie de la formule par rapport aux indices 1 et 2 montre que l'énergie potentielle de la masse  $m_2$  plongée dans le champ de gravitation  $\vec{G}_1$  créé par la masse  $m_1$  a la même expression.

**Loi 13**

L'énergie potentielle  $E_p$  de chacune des deux masses  $m_i$  plongées chacune dans le champ de gravitation de l'autre est<sup>12</sup> :

$$E_{p1} = E_{p2} = \frac{-Km_1m_2}{r_{12}} + \text{cte.}$$

11. On annule les constantes additives de l'énergie potentielle et du potentiel. La traduction physique est que lorsque les deux masses sont infiniment éloignées, le potentiel et l'énergie potentielle s'annulent. Cela est cohérent avec l'annulation de la force qu'exerce  $m_2$  sur  $m_1$ , donc avec la disparition de l'interaction.

12. Lorsque la constante additive est prise nulle, l'énergie potentielle de chacune des masses devient nulle lorsque ces charges sont infiniment éloignées. La force exercée par une masse sur l'autre s'annule alors, ce qui est physiquement cohérent avec une énergie potentielle nulle.

### G.2.2 – Énergie potentielle d'interaction de deux masses

Les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , placées respectivement à leur position finale aux points  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $M_1M_2 = r_{12}$ , possèdent chacune une énergie potentielle gravitationnelle définie dans le paragraphe précédent. Pour donner à cette énergie la signification d'une énergie potentielle d'interaction, on reprend la définition équivalente vu dans le cadre de l'électrostatique.

Hidden page

## L'essentiel

On résume l'équivalence mathématique entre la force de Coulomb et l'interaction gravitationnelle par un tableau dans lequel on remplace les grandeurs électriques des formules d'électrostatique par les grandeurs mécaniques pour obtenir :

Hidden page

## Méthode n° 2

### Comment déterminer l'expression d'un champ gravitationnel ?

On cherche l'expression vectorielle du champ gravitationnel créé en un point  $M$  quelconque par une distribution de masses de densité  $\sigma$ .

#### → Savoir faire

- 1 Effectuer des considérations de symétrie et d'invariances pour connaître la topographie du champ de gravitation  $\vec{G}$ . En déduire le choix d'un système de coordonnées (méthode n°1).
- 2 S'il existe une surface fermée passant par  $M$  telle que le flux du champ  $\vec{G}$  est proportionnel à son module  $G$ , alors appliquer le théorème de Gauss. Pour trouver une telle surface (fermée et dite « de Gauss »), chercher une surface sur laquelle  $G$  reste constant et la compléter éventuellement avec des surfaces à travers lesquelles le flux de  $\vec{G}$  est nul. S'il n'existe pas de telle surface fermée, alors poser l'intégrale qui propose le calcul « direct » du champ.
- 3 Si la surface de Gauss a pu être trouvée, alors appliquer le théorème ; en déduire la valeur de  $G$ , puis l'expression de  $\vec{G}$ .
- 4 Si la surface de Gauss n'a pu être trouvée, projeter alors l'intégrale qui propose le calcul direct du champ  $\vec{G}$  sur les directions dans lesquelles on sait que la projection de  $\vec{G}$  est non nulle. Faire le calcul de chacune des composantes (intégrales scalaires). En déduire l'expression de  $\vec{G}$ .

#### → Application 1

Déterminer l'expression vectorielle du champ gravitationnel créé en un point  $M$  quelconque par une distribution surfacique de masses de densité  $\sigma$  uniforme sur un plan infiniment étendu.

#### Solution

- 1 La méthode n° 1 a permis de trouver  $\vec{G} = G(z)\vec{u}_z$ , dans un système de coordonnées cartésiennes tel que le plan chargé est le plan  $(Oxy)$ .
- 2  $G$  reste constant lorsque  $z$  reste constant. Une surface sur laquelle  $z$  reste constant est une portion de plan parallèle au plan  $(Oxy)$ , un carré de côté  $a$  par exemple.

On n'a pas encore défini de surface fermée. Au point  $M'$  de cote  $-z$ , le champ s'écrit :

$$\vec{G}(M') = -\vec{G}(M).$$

En effet, le plan chargé  $(Oxy)$  est symétrique par rapport à lui-même et  $M$  devient  $M'$ . Or, comme le champ en  $M$  est orthogonal à  $(Oxy)$ , et vu que les vecteurs orthogonaux au plan de symétrie sont changés en leurs opposés par symétrie, on en déduit que :  $\vec{G}(M') = -\vec{G}(M)$ .

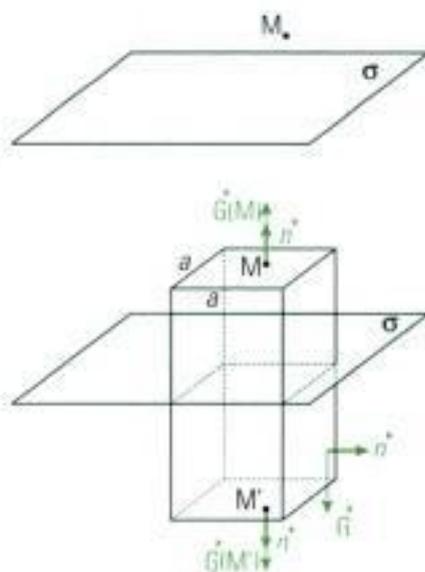
La projection du champ sur son axe  $(Oz)$  est une fonction impaire de  $z$ .

Donc sur deux portions de surface plane (aux cotes  $z$  et  $-z$ ), le module du champ reste constant.

On peut créer une surface fermée en connectant ses deux portions par une surface cylindrique à base carrée de côté  $a$  et de génératrice parallèle à  $(Oz)$  : la normale à cette surface est alors dans un plan  $(Oxy)$  et le flux du champ  $\vec{G}$  est nul à travers cette surface ( $\vec{G} \cdot \vec{n} = 0$  en tout point).

- 3 Le flux de  $\vec{G}$  n'est non nul qu'à travers les deux carrés de côté  $a$ . Si l'on écrit  $\vec{G}(M) = G(z)\vec{u}_z$ , alors  $\vec{G}(M') = -G(z)\vec{u}_z$  et le flux total vaut :

$$\phi = 2G(z)a^2,$$



car alors  $G \cdot \vec{n} = G(z)$ . La masse intérieure est celle contenue dans un carré de côté  $a$  :

$$m_{\text{int}} = \sigma a^2.$$

L'équivalence résumée dans *L'essentiel* indique de remplacer la constante  $\frac{1}{\epsilon_0}$  électrostatique par la constante gravitationnelle  $-4\pi K$ .

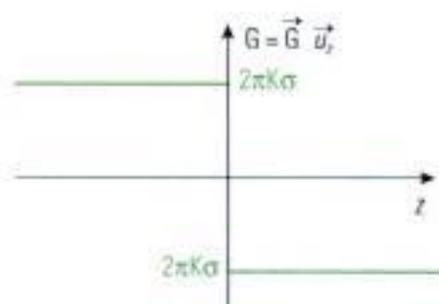
Le théorème de Gauss s'écrit :  $-4\pi K m_{\text{int}}$ , soit  $2G(z)a^2 = -4\pi K \sigma a^2$ . Il vient :

$$G(z) = -2\pi K \sigma \quad \text{et} \quad \vec{G}(z > 0) = -2\pi K \sigma \vec{u}_z, \quad \vec{G}(z < 0) = 2\pi K \sigma \vec{u}_z.$$



Le choix de la surface carrée n'a aucune importance et on aurait pu prendre à la place une surface de forme quelconque, par exemple en forme de cœur ou de pique et nommer  $S$  sa surface. En revanche, il est primordial que cette surface soit parallèle au plan  $(Oxy)$ .

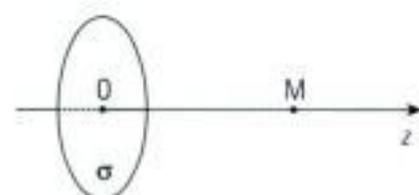
La courbe  $G = f(z)$  montre bien la discontinuité du champ lorsque  $z = 0$ , c'est-à-dire sur le plan chargé. Mais pour un point  $M$  de ce plan, en plus des plans  $(Mxz)$  et  $(Myz)$ , le troisième plan  $(Mxy) = (Oxy)$  est aussi plan de symétrie. L'intersection de ces trois plans est le point  $M$  et il en découle  $\vec{G} = \vec{0}$ . C'est bien la valeur moyenne des deux limites du champ lorsque  $z$  s'annule. On atteint alors les limites du modèle : le champ ne diverge pas sur les masses, car la distribution est volumique (même si l'on n'en perçoit pas l'épaisseur). Sa valeur passe donc de  $-2\pi K \sigma$  à  $2\pi K \sigma$  sans diverger et de manière continue lorsque l'on traverse la distribution, mais son épaisseur non mesurable ne laisse voir que la discontinuité.



### → Application 2

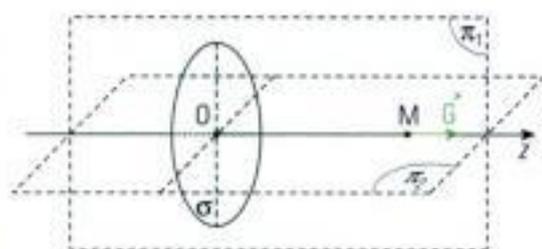
Soit un disque de centre  $O$  et de rayon  $R$  sur la surface duquel sont disposées des masses de manière uniforme avec la densité  $\sigma$  constante et positive.

Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{G}$  (direction, sens et module) en tout point  $M$  de l'axe de révolution du disque.



### Solution

On applique la méthode n° 1. Tout plan contenant l'axe de révolution du disque contient  $M$  et est plan de symétrie de la distribution (on montre deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ) : le champ gravitationnel en  $M$  est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire l'axe de révolution du disque. On nomme  $(Oz)$  cet axe, l'origine  $O$  étant le centre du disque. *A priori*, on choisirait un système de coordonnées cylindriques ou cartésiennes, mais la forme de la distribution nous amène à préférer les coordonnées cylindriques.



De plus, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe : c'est donc bien les coordonnées cylindriques qu'il faut choisir,  $(Oz)$  étant l'axe du disque autour duquel il y a invariance par rotation (axe « de révolution »).

Le point  $M$  étant nécessairement sur l'axe, la seule variable est alors sa cote  $z$  et on écrit :

$$\vec{G}(M) = G(z)\vec{u}_z.$$

On cherche une surface de Gauss. Il faut donc  $G$  constant. Or on ne connaît la direction de  $\vec{G}$  que sur l'axe  $(Oz)$ . Pour un point  $M$  ne se trouvant pas sur l'axe, il n'existe qu'un seul plan de symétrie : celui contenant  $M$  et l'axe. On ne peut plus avoir la direction du champ ( $\vec{G} \cdot \vec{n}$  ne sera plus calculable).



Hidden page

l'espace où il est défini, en fonction de  $\rho_0$  et  $R$ , puis en fonction de  $m$  et  $R$ . Conclure.

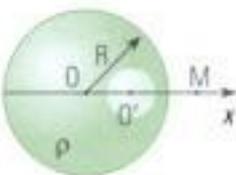
## Niveau 3

### Ex. 5 Cavité sphérique dans une sphère

Soit une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  chargée uniformément en volume avec la densité volumique de masses  $\rho$ . Soit  $(x'Ox)$  un axe diamétral de la sphère. La sphère précédente possède une cavité sphérique (pas de masses)

de rayon  $\frac{R}{6}$  et de centre  $O'$  se trouvant sur l'axe  $x'x$  à la distance  $\frac{R}{2}$  de  $O$ .

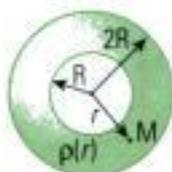
Montrer que le champ gravitationnel est uniforme dans le trou sphérique. Déterminer son expression.



### Ex. 6 Symétrie sphérique

Une distribution de masses est à symétrie sphérique de centre  $O$ . Les masses sont réparties en volume avec une densité  $\rho(r)$ ,  $r$  désignant la distance au point  $O$ . La densité  $\rho$  n'est non nulle qu'entre  $r = R$  et  $r = 2R$ , elle est nulle ailleurs et la masse totale de la distribution est  $m$ . Le champ gravitationnel créé par cette distribution vaut  $\vec{G} = k(\alpha r - R) \vec{u}_r$  dans l'intervalle  $[R ; 2R]$ , où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial de la base des coordonnées sphériques et  $k$  et  $\alpha$  deux constantes.

1) Donner le domaine de définition du champ  $\vec{G}$ . Le champ est-il continu partout ?



2) Déterminer  $G = \|\vec{G}\|$  pour  $r < R$ . En déduire la valeur de  $\alpha$ .

3) Déterminer  $G = \|\vec{G}\|$  pour  $r > 2R$ . Déduire la valeur de  $k$ .

4) Appliquer le théorème de Gauss pour un point  $M$  de l'intervalle  $[R ; 2R]$  pour obtenir une équation donnant une primitive de la loi  $\rho(r)$  en fonction de  $G$ .

5) En déduire la loi  $\rho(r)$ . Vérifier l'homogénéité de la formule obtenue.

### Ex. 7 Énergie gravitationnelle

Une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de masse  $m$  est uniformément chargée en volume avec une densité volumique de masse  $\rho$ . On se propose de déterminer son énergie potentielle gravitationnelle. Pour cela, on se propose de la construire « couche après couche », c'est-à-dire en amenant successivement des masses telles que son rayon passe successivement de la valeur  $r$  à  $r + dr$ .

1) Soit une sphère de rayon  $R$ , de masse  $M$  et de densité volumique de masse  $\rho$  uniforme. Donner l'expression du champ gravitationnel  $\vec{G}$  lorsque  $r > R$ . En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_p$  d'une masse  $m'$  placée dans ce champ gravitationnel.

2) Exprimer en fonction de  $\rho$ ,  $r$  et  $dr$  la masse  $dm$  qui, déposée sur la sphère de rayon  $r$ , fait augmenter son rayon de  $dr$ .

3) Quel travail élémentaire  $dW$  a fourni l'opérateur pour déposer cette couche sur la sphère ?

4) En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle de la sphère en fonction de  $\rho$  et  $R$ , puis en fonction de  $m$  et  $R$ .

## Indications

#### Ex. 1

Appliquer la correspondance des constantes et la méthode n° 2 du chapitre 2.

#### Ex. 2

Penser au théorème de l'énergie cinétique ou mécanique.

#### Ex. 3

Se rappeler que la Terre tourne !

#### Ex. 4

La masse se calcule par sommation continue, c'est-à-dire par intégration.

#### Ex. 5

Le théorème de superposition est possible mathématiquement.

#### Ex. 6

Théorème de Gauss et conditions de continuité.

#### Ex. 7

L'énergie potentielle est égale au travail que doit fournir l'opérateur pour créer la distribution.

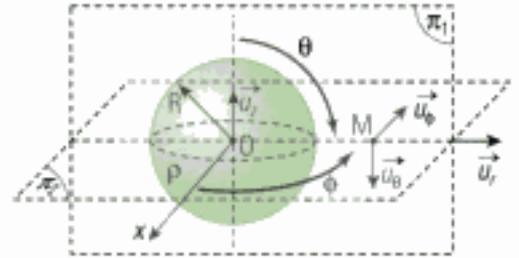
# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

1) La distribution de charges étant volumique, le champ électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace.

2) Comme dans la méthode n° 2 du chapitre 2, en tenant compte des conditions d'équivalence données dans le cours, on effectue des considérations de symétrie et d'invariance. La forme de la distribution incite à choisir le système de coordonnées sphériques, l'origine O étant le centre de la sphère.



#### • Symétries

Tout plan  $\pi$  contenant la droite (OM) est plan de symétrie de la distribution. On a tracé par exemple les plans  $\pi_1 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $\pi_2 = (M ; \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  ; le champ gravitationnel  $\vec{G}$  est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire sur la droite (OM). Donc  $\vec{G}$  est dirigé, comme  $\vec{OM}$ , selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  des coordonnées sphériques (ce qui valide le choix du système de coordonnées).

Donc :

$$\vec{G}(M) = G(r, \theta, \phi) \vec{u}_r.$$

#### • Invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'origine O. Deux rotations autour d'un point étant mises en évidence, le système de coordonnées sphériques est donc bien adapté. On en déduit  $G = G(r)$ .

Finalement, dans un système de coordonnées sphériques :

$$\vec{G}(M) = G(r) \vec{u}_r.$$

Recherchons une surface de Gauss.  $G$  reste constant lorsque  $r$  est constant : cela définit, en coordonnées sphériques, une sphère de rayon  $r$ . Sur cette sphère (de surface  $\Sigma$ ),  $\vec{G}$  et la normale sont colinéaires et de même sens : le flux sera proportionnel à  $G$  et simple à exprimer. De plus, la surface est fermée. Le flux du champ gravitationnel  $\vec{G}$  à travers  $\Sigma$  vaut :

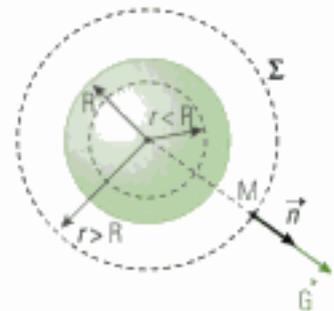
$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} G dS = G \iint_{\Sigma} dS = GS = G4\pi r^2.$$

On note que  $G$  est la mesure du champ gravitationnel selon le sens de  $\vec{u}_r$ . La force gravitationnelle étant attractive,  $G < 0$ , mais ce signe n'apparaît pas explicitement dans l'expression du flux.

Il reste à calculer la masse se trouvant à l'intérieur de la surface de Gauss. Deux cas se présentent, selon que le point M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.

Dans le premier cas, les masses concernées ne sont qu'une partie de la masse totale de la distribution et la totalité du volume délimité par la surface de Gauss contient des masses :

$$m_{\text{int}}(r < R) = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Dans le second cas, la totalité de la masse de la distribution se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss, laquelle n'est plus entièrement remplie. Il vient donc :

$$m_{\text{int}}(r > R) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3.$$

On applique maintenant le théorème de Gauss dans chacun des deux cas précédents :

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}}.$$

• Pour  $r < R$  :  $m_{\text{int}}(r < R) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$  ;  $\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = -4\pi K \frac{\rho 4\pi r^3}{3}$  ;

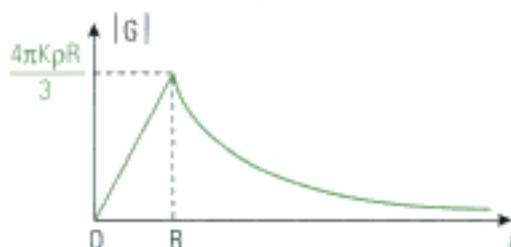
$$G(r < R) = \frac{-4\pi K \rho r}{3}.$$

• Pour  $r > R$  :  $m_{\text{int}}(r > R) = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$  ;  $\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = -4\pi K \frac{\rho 4\pi R^3}{3}$  ;

$$G(r > R) = \frac{-4\pi K \rho R^3}{3r^2}.$$

$$\vec{G}(r < R) = \frac{-4\pi K \rho r}{3} \vec{u}_r ;$$

$$\vec{G}(r > R) = \frac{-4\pi K \rho R^3}{3r^2} \vec{u}_r.$$



La courbe donne les variations de  $|G|$  en fonction de celles de  $r$ . On vérifie que le champ est continu.

Pour avoir l'expression de  $G$  en fonction de la masse  $m$  de la sphère, on utilise la relation  $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$  et il vient :

$$\vec{G}(r < R) = \frac{-Kmr}{R^3} \vec{u}_r \quad ; \quad \vec{G}(r > R) = \frac{-Km}{r^2} \vec{u}_r.$$

3) On s'aperçoit que lorsque  $r > R$ , tout se passe comme si le champ gravitationnel au point  $M$  était créé par la masse  $m$  ponctuelle et placée en  $O$ .

On peut donc ramener l'expression du champ gravitationnel créé par une distribution de masses à symétrie sphérique à celle d'un champ créé par la masse totale de la distribution et placée au centre de symétrie.

## Exercice 2

1) La Terre étant supposée être une sphère homogène de masse  $m$ , on applique la même méthode qu'à l'exercice 1 et le résultat s'écrit :

$$\vec{G}(r) = \frac{-Km}{r^2} \vec{u}_r,$$

où  $r$  désigne la distance qui sépare le satellite (ponctuel) du centre  $O$  de la Terre.

2) L'énergie potentielle de gravitation est donnée dans le cours :

$$E_p = \frac{-KmM}{r} + \text{cte.}$$

Cette expression correspond à l'énergie potentielle d'interaction entre les deux masses ponctuelles  $m$  et  $M$  distantes de  $r$ . On peut utiliser cette expression ici, car au niveau du satellite (ponctuel), tout se passe comme si le champ gravitationnel terrestre était créé par la masse ponctuelle  $M$  placée en  $O$ . Il s'agit donc bien du modèle d'interaction de deux masses ponctuelles.

La force de gravitation s'annule à l'infini (comme le champ gravitationnel) et l'on choisit donc pour annuler l'énergie potentielle gravitationnelle à l'infini.

De plus, l'égalité  $r = R + h$  aboutit à donner à l'énergie potentielle l'expression finale :

$$E_p = \frac{-KmM}{R + h}.$$

3) Lorsque le satellite quitte le sol,  $h = 0$  et l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_{p0} = \frac{-K m M}{R}.$$

4) Entre l'état initial dans lequel le satellite quitte le sol et l'état final de révolution autour de la Terre à l'altitude  $h$ , seule la force de gravitation intervient et travaille. C'est une force conservative à laquelle on associe l'énergie potentielle gravitationnelle précédente.

On peut écrire le théorème de l'énergie cinétique (aussi théorème de l'énergie mécanique) entre les deux instants initial et final :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + E_{p0} = E_p + \frac{1}{2} m v^2, \text{ soit } \frac{1}{2} m v_0^2 = K m M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) + \frac{1}{2} m v^2,$$

et donc :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2KMh}{R(R+h)} + v^2}.$$

5) L'expression de  $v$  est donnée par :

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T}.$$

A.N. On trouve  $v = 6,88 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , et par suite  $v_0 = 7,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 3

1) Le champ de gravitation terrestre en A s'écrit :

$$\vec{G}_T(A) = \frac{-K m}{R^2} \vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{OA}}{OA}.$$

2) Le champ de gravitation lunaire en B s'écrit :

$$\vec{G}_L(B) = \frac{-K m}{(d' - R)^2} \vec{u}', \text{ où } \vec{u}' = \frac{\vec{O'B}}{O'B}.$$

3) Le champ de gravitation solaire en C s'écrit :

$$\vec{G}_S(C) = \frac{-K m}{(d'' - R)^2} \vec{u}'', \text{ où } \vec{u}'' = \frac{\vec{O''C}}{O''C}.$$

4) A.N.  $\|\vec{G}_T(A)\| = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\|\vec{G}_L(B)\| = 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\|\vec{G}_S(C)\| = 0,006 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

5) En un point de la surface de la Terre, on constate que la contribution du champ de gravitation lunaire au champ total est infime, celle du champ de gravitation solaire étant quasiment négligeable (moins de 0,1 % du champ terrestre).

La valeur mesurée de  $g$  étant différente de celle de  $\|\vec{G}_T(A)\|$ , le modèle proposé est erroné.

Les données numériques de l'exercice sont certes arrondies et le modèle sphérique de la Terre est approximatif, mais cela ne suffit pas à expliquer la différence : elle vient du fait que la mesure est effectuée dans le référentiel terrestre non galiléen et que l'on doit alors tenir compte de l'accélération d'entraînement.

Malgré la faible valeur des champs de gravitation lunaire et solaire, on observe le phénomène des marées lié au fait que les masses d'eau qui subissent ces champs de gravitation « tournants » dans le référentiel terrestre sont énormes, de sorte que les forces de gravitation exercées par la Lune et le Soleil doivent être prises en compte.

## Exercices de niveau 2

### Exercice 4

1) On calcule la masse  $m$  à partir de la densité volumique. La distribution de masse possède une géométrie « sphérique » : le système de coordonnées le mieux adapté est donc le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ .

Lorsqu'un point  $M$  décrit le volume  $V$  de la Terre, la distance au centre  $C$  (origine du repère des coordonnées sphériques) varie de 0 à  $R$ , tandis que les angles  $\theta$  et  $\phi$  varient respectivement de 0 à  $\pi$  et de 0 à  $2\pi$ . L'élément de volume  $dV$  contient la masse élémentaire :

$$dm = \rho dV = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

La masse  $m$  totale est alors la somme des masses élémentaires :

$$m = \iiint dm = \iiint \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

L'intégrale triple se décompose en produit d'intégrales simples :

$$m = \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi = \rho_0 \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right]_0^R \times [-\cos\theta]_0^\pi \times [\phi]_0^{2\pi},$$

d'où :

$$m = \rho_0 \left( \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5} \right) \times 2 \times 2\pi = \frac{8}{15} \rho_0 \pi R^3.$$

2) Dans ce problème à symétrie sphérique, on montre, comme dans l'exercice 1, qu'en tout point  $M$  de l'espace :

$$\vec{G}(M) = G(r) \vec{u}_r,$$

où  $r = OM$  et  $G$  la mesure (négative) du champ de gravitation selon l'axe radial orienté comme  $\vec{u}_r$ .

La surface de Gauss, comme dans l'exercice 1, reste une sphère centrée sur  $O$  et de rayon  $r = OM$ . Le flux de  $\vec{G}$  à travers cette surface fermée a aussi été calculé :

$$\phi = G4\pi r^2.$$

Mais le calcul de la masse intérieure est différent car la densité est ici non uniforme.

Il reste cependant deux cas à considérer :

a)  $r < R$  pour lequel la masse intérieure est celle contenue dans la sphère « de Gauss » et n'est pas la masse totale :

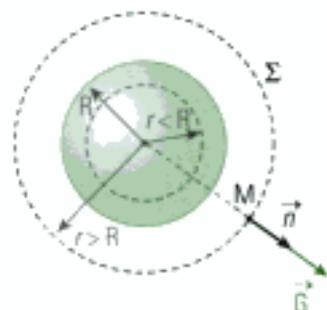
$$m_{\text{int}}(r < R) = \iiint_V \rho(r') dV = \rho_0 \iiint_V \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi.$$

$$m_{\text{int}}(r < R) = \rho_0 \int_{r'=0}^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr' \times \underbrace{\int_{\theta=0}^\pi \sin\theta d\theta}_2 \times \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 dr',$$

$$m_{\text{int}}(r < R) = 4\pi\rho_0 \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2} \right]_0^r = 4\pi\rho_0 r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right).$$



Lorsqu'il y a des invariances selon les angles, la grandeur à intégrer ne dépend que de  $r$ . On peut intégrer directement sur les angles. Le volume élémentaire est celui d'une couronne sphérique comprises entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  et devient  $dV = 4\pi r^2 dr$ .



b)  $r > R$  pour lequel la masse totale de la distribution se trouve à l'intérieur de la sphère de Gauss ; l'intégrale est la même, seule la borne d'intégration change car on intègre entre 0 et R au lieu de la faire entre 0 et  $r$ . On a alors :

$$m_{\text{int}}(r > R) = 4\pi\rho_0 \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2} \right]_0^R = 4\pi\rho_0 R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{R^2}{5R^2} \right) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}.$$

On applique maintenant le théorème de Gauss dans chacun des cas :

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}}.$$

$$\bullet r < R : m_{\text{int}}(r < R) = 4\pi\rho_0 r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right);$$

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = -4\pi K \times 4\pi\rho_0 r^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right); G(r < R) = -4\pi K \rho_0 r \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right).$$

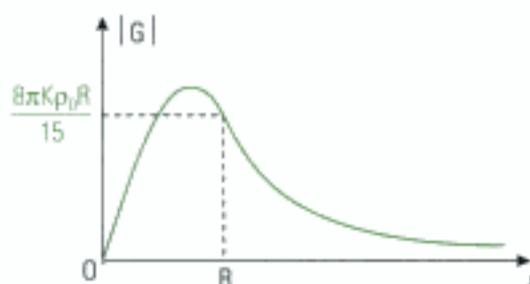
$$\bullet r > R : m_{\text{int}}(r > R) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15};$$

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = -4\pi K \times \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}; G(r > R) = \frac{-8\pi K \rho_0 R^3}{15r^2}.$$

$$\vec{G}(r < R) = -4\pi K \rho_0 r \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2} \right) \vec{u}_r;$$

$$\vec{G}(r > R) = \frac{-8\pi K \rho_0 R^3}{15r^2} \vec{u}_r.$$

La courbe donne les variations de  $|G|$  en fonction de celles de  $r$ . On vérifie que le champ est continu.



Avec la relation  $m = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$ , on trouve :

$$\vec{G}(r < R) = \frac{-Kmr}{2} \left( \frac{5}{R^3} - \frac{3r^2}{R^5} \right) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{G}(r > R) = \frac{-Km}{r^2} \vec{u}_r.$$

On retrouve le fait que le champ de gravitation créé à l'extérieur de la distribution est le même que celui créé par la masse totale de la distribution placée au point O.

## Exercices de niveau 3

### Exercice 5

Soit un point M de la cavité. Seul le plan contenant M et l'axe (Ox) est plan de symétrie pour la distribution, et on ne constate qu'une seule invariance par rotation autour de l'axe (Ox) : le théorème de Gauss ne donnera rien car les symétries ne sont pas suffisamment puissantes pour pouvoir connaître la direction du champ en tout point.

Le calcul direct est une intégrale triple et la cavité impose des conditions délirantes sur les bornes d'intégration... le calcul direct est impossible à faire « à la main ».

En revanche, on sait calculer facilement le champ gravitationnel créé par une sphère uniformément chargée en volume (se reporter à l'exercice 1). Il faut donc se ramener à une sphère uniformément pleine.

La solution consiste à remplacer la cavité par la superposition de deux sphères pleines de densités volumiques de masses opposées  $+\rho$  et  $-\rho$ .

Bien que l'argument soit physiquement choquant (la masse négative n'existe pas !), il est mathématiquement justifié. En effet, le champ de gravitation obéit, comme le champ électrostatique, au

principe de superposition. On peut donc avancer l'argument mathématique que la superposition de deux champs gravitationnels (opposés) créés par deux masses opposées se trouvant au même endroit est celui (nul) créé par la masse « résultante » nulle.

La distribution devient alors la superposition de deux sphères pleines uniformément chargées en volume, la première de rayon  $R$ , de centre  $O$  et chargée avec la densité  $\rho$ , la seconde de centre  $O'$ , de rayon  $R/6$  et chargée avec la densité  $-\rho$ .

Le champ gravitationnel créé par cette superposition est la somme des champs gravitationnels créés par chacune des sphères.

Rappelons les résultats de l'exercice 1, où l'on a calculé le champ gravitationnel créé par une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  pleine avec la densité volumique  $\rho$  :

$$\vec{G}(r < R) = \frac{-4\pi K\rho r}{3} \vec{u}_r = \frac{-4\pi K\rho}{3} \vec{OM} \text{ (car } \vec{OM} = r\vec{u}_r\text{)} \text{ et } \vec{G}(r > R) = \frac{-K_m}{r^2} \vec{u}_r = \frac{-K_m}{r^3} \vec{OM}.$$

On applique maintenant ce résultat à un point  $M$  quelconque de la cavité. Ce point est intérieur à chacune des deux sphères chargées et le champ est la somme des deux expressions correspondantes :

$$\vec{G}(M) = \frac{-4\pi K\rho}{3} \vec{OM} + \frac{-4\pi K(-\rho)}{3} \vec{O'M} = \frac{4\pi K\rho}{3} \vec{O'O} = \frac{2\pi K\rho R}{3} \vec{u}_x.$$

Ce champ est bien uniforme car il ne dépend pas de la position de  $M$ .

## Exercice 6

1) Les masses sont volumiques : le champ gravitationnel est défini et continu partout.

2) Le champ gravitationnel  $\vec{G}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$  dans l'intervalle  $[R ; 2R]$ , la densité volumique de masse ne dépend que de  $r$  : tout plan passant par  $M$  et  $O$  est plan de symétrie pour la distribution et le champ est dirigé selon  $\vec{u}_r$  en tout point  $M$ . De plus on constate deux invariances par rotation autour de  $O$ , donc en coordonnées sphériques :  $\vec{G}(M) = G(r)\vec{u}_r$  en tout point  $M$ .

Appliquons donc le théorème de Gauss en prenant comme surface de Gauss fermée une sphère centrée sur  $O$  et passant par  $M$  (donc de rayon  $r = OM$ ). Cette démarche a déjà été faite à l'identique dans l'exercice 1 et on en reporte le résultat :

$$\phi = G4\pi r^2.$$

Lorsque  $M$  est tel que  $r < R$ , la sphère de Gauss ne contient aucune masse car  $\rho(r < R) = 0$ .

Donc  $m_{\text{int}}$  et le théorème de Gauss donne  $\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = 0$ , donc  $\vec{G}(r < R) = \vec{0}$ .

Le champ est nul dans la cavité  $0 < r < R$  et vaut  $\vec{G} = k(\alpha r - R)\vec{u}_r$  pour  $R < r < 2R$ .

Il est continu en  $r = R$  car les masses sont volumiques, et les deux champs sont égaux :

$$\vec{G}(r = R) = \vec{0} = k(\alpha R - R)\vec{u}_r, \text{ soit } \alpha = 1.$$

3) Lorsque  $M$  est à l'extérieur de la distribution ( $r > 2R$ ), appliquons encore le théorème de Gauss. La surface reste la même, donc le flux du champ est inchangé. D'autre part, la masse intérieure est la masse totale  $m$  et le théorème de Gauss s'écrit donc simplement :

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m, \text{ soit } \vec{G}(r > R) = \frac{-K_m}{r^2} \vec{u}_r.$$

De plus, la continuité du champ  $\vec{G}$  pour  $r = 2R$  implique l'égalité des deux expressions

$$\vec{G} = k(r - R)\vec{u}_r, \text{ pour } R < r < 2R \text{ et } \vec{G}(r > R) = \frac{-K_m}{r^2} \vec{u}_r, \text{ lorsque } r > 2R, \text{ soit :}$$

$$\vec{G}(r = 2R) = \frac{-K_m}{4R^2} \vec{u}_r = k(2R - R)\vec{u}_r = kR \vec{u}_r, \text{ d'où } k = \frac{-K_m}{4R^3}.$$

4) On applique maintenant le théorème de Gauss pour un point M de la distribution  $R < r < 2R$ . Le flux reste le même mais la charge intérieure n'est pas évidente à exprimer car on ne connaît pas la loi  $\rho(r)$  :

$$\phi = G4\pi r^2 \text{ et } m_{\text{int}} = \iiint_V \rho(r') dV = \iiint_V \rho(r') r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \times \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta}_2 \times \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$m_{\text{int}} = \int_{r'=0}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'.$$

$4\pi r'^2 dr'$  est le volume élémentaire  $dV$  intégré sur les angles. Il représente physiquement le volume de la couronne sphérique comprise entre les deux sphères de rayons  $r'$  et  $r' + dr'$ . Dans cette couronne, la densité volumique  $\rho$  reste constante.

Le théorème de Gauss appliqué au point M de la distribution donne :

$$\phi = G4\pi r^2 = -4\pi K m_{\text{int}} = -4\pi K \int_{r'=0}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr', \text{ soit } \frac{-Gr^2}{K} = \int_{r'=0}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr',$$

où le second membre représente mathématiquement une primitive de la loi  $r^2\rho(r)$  exprimée en fonction de  $\vec{G}(R < r < 2R) = k(\alpha r - R)\vec{u}_r = \frac{-Km}{4R^3} (r - R)\vec{u}_r$  :

$$\frac{r^2 G(r)}{-4\pi K} = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \text{ devient } \frac{mr^2}{16\pi R^3} (r - R) = \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

5) On souhaite obtenir l'expression de la loi  $\rho(r)$  dont on ne connaît qu'une primitive. Dérivons donc cette expression :

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{r'=0}^r \rho(r') r'^2 dr' \right) = r^2 \rho(r) = \frac{d}{dr} \left( \frac{mr^2}{16\pi R^3} (r - R) \right) = \frac{m}{16\pi R^3} \frac{d}{dr} (r^3 - Rr^2)$$

$$= \frac{m}{16\pi R^3} (3r^2 - 2Rr).$$

$$\rho(r) = \frac{m}{16\pi R^3} \left( 3 - \frac{2R}{r} \right).$$

Le facteur dans la parenthèse étant sans dimension, le rapport  $\frac{m}{16\pi R^3}$  est bien une masse divisée par un volume, soit des kilogrammes par mètre cube, c'est-à-dire une densité volumique de masses.

## Exercice 7

1) Comme dans l'exercice 1, le champ gravitationnel créé par une sphère de masse M, de rayon R et de masse volumique uniforme  $\rho$  en un point extérieur à cette sphère est :

$$\vec{G}(r > R) = \frac{-KM}{r^2} \vec{u}_r,$$

le système de coordonnées sphériques ayant été choisi pour les raisons de symétrie et d'invariance rappelées dans l'exercice 1.

Tout se passe comme si ce champ était créé par la masse M ponctuelle placée en O, centre de la sphère. Ainsi, le dispositif constitué par la masse  $m'$  placée dans ce champ est équivalent au dispositif constitué par les deux masses ponctuelles M et  $m'$ .

On peut alors définir une énergie potentielle gravitationnelle  $E_p$  d'interaction entre ces deux masses, équivalente à celle de la masse  $m'$  plongée dans le champ écrit plus haut :

$$E_p = \frac{-Km'M}{r},$$

en prenant la constante additive nulle et où  $r$  est la distance entre les deux masses ponctuelles.

2) Le rayon de la sphère passe de  $r$  à  $r + dr$  et l'augmentation du volume correspond au volume d'une couronne sphérique d'épaisseur  $dr$  :

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

La masse correspondante est donc  $dm = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr$ .

3) L'opérateur a approché la masse  $dm$  depuis une position infiniment éloignée, où sa vitesse était nulle, jusqu'à la position finale sur la périphérie de la sphère, où sa vitesse est devenue nulle.

Ce faisant, l'opérateur a lutté contre la force gravitationnelle. On peut aussi dire que les seules forces en présence sont la force exercée par l'opérateur et la force gravitationnelle conservative. En écrivant le théorème de l'énergie potentielle entre les positions initiale et finale pour la masse  $dm$ , on a :

$$(E_{cf} + E_{pf}) - (E_{ci} + E_{pi}) = W_{op},$$

où le second membre est le travail fourni par l'opérateur, puisque le travail de la force gravitationnelle se trouve implicitement dans l'expression de l'énergie potentielle associée.

Les énergies cinétiques sont nulles, les énergies potentielles prennent l'expression écrite dans la question 1, en remplaçant la masse  $m'$  par l'élément de masse  $dm$ . L'énergie potentielle initiale est nulle. La masse étant élémentaire, le travail de l'opérateur l'est aussi et le théorème devient :

$$0 + \frac{-KdmM}{r} - (0 + 0) = dW_{op},$$

soit, avec  $M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$  et  $dm = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr$  :

$$dW_{op} = \frac{-KdmM}{r} = \frac{-K}{r} \times \frac{4\pi\rho r^3}{3} \times 4\pi\rho r^2 dr = \frac{-16\pi^2 K\rho^2 r^4 dr}{3}.$$

4) L'énergie potentielle gravitationnelle totale de la sphère est la somme des travaux que l'opérateur a dû fournir pour construire peu à peu cette sphère, c'est-à-dire pour faire croître son rayon de la valeur 0 à la valeur  $R$ . Cette somme s'écrit mathématiquement :

$$E_p = \int dW_{op} = \int_{r=0}^R \frac{-16\pi^2 K\rho^2 r^4 dr}{3} = \frac{-16\pi^2 K\rho^2}{3} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{-16\pi^2 K\rho^2 R^5}{15}.$$

Cette énergie potentielle est négative, ce qui est conforme au fait que la force exercée par l'opérateur a dû être opposée à la force gravitationnelle, et le travail de la force gravitationnelle est positif lors du rapprochement de deux masses. Le travail de l'opérateur a donc été résistant, c'est-à-dire négatif.



# Le champ magnétique

## Introduction

La force de Lorentz met en évidence l'existence du champ magnétique. On étudiera les champs magnétiques créés par les courants électriques indépendants du temps : on peut aussi parler de champ magnétostatique, vu qu'aucune variation n'a lieu dans le temps.

Dans l'air, ici assimilé au vide, on donne l'expression du champ magnétique créé par une distribution de courants à partir de la loi de Biot et Savart : c'est la démarche historique. Le programme la restreint aux courants filiformes : c'est le calcul « direct » du champ.

Les propriétés de symétrie et d'invariance sont étudiées pour savoir déterminer la carte des lignes de champ, et lorsque les considérations de symétrie et d'invariance sont suffisantes, le théorème d'Ampère permet d'obtenir sans calcul de primitive l'expression du champ magnétique, contrairement au calcul « direct ».

### Plan du chapitre 6

<b>A. Mise en évidence et définition du champ magnétique</b> .....	142
<b>B. Loi de Biot &amp; Savart</b> .....	142
<b>C. Existence et continuité du champ</b> .....	143
<b>D. Topographie du champ magnétique</b>	
1. Pseudo vecteur .....	145
2. Considérations de symétrie .....	145
3. Considérations d'invariance .....	147
4. Sens du vecteur champ magnétique .....	147
<b>E. Lignes de champ</b> .....	149
<b>F. Flux du champ magnétique</b>	
1. Cas d'une surface fermée .....	149
2. Cas d'une surface ouverte .....	150
3. Conséquence : interprétation des lignes de champ .....	150
<b>G. Théorème d'Ampère</b>	
1. Circulation du champ magnétique .....	151
2. Formulation du théorème .....	151
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	153
<b>Énoncés des exercices</b> .....	158
<b>Indications</b> .....	160
<b>Solutions des exercices</b> .....	161

1. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Hollandais, a effectué des travaux sur la lumière et les particules de grande vitesse qui ont été fondamentaux pour la compréhension des phénomènes relativistes tels que la dilatation des durées et la contraction des longueurs. Il a laissé une formule concernant ces phénomènes qui porte son nom.

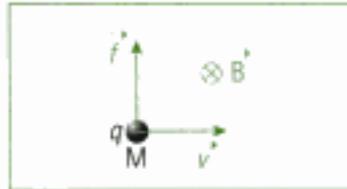


Fig. 1 - Charge positive.

2. On verra en détail dans le chapitre 7 que le courant électrique est constitué de charges en mouvement et, dans ce chapitre, que la matière aimantée peut être correctement modélisée par des boucles de courant.

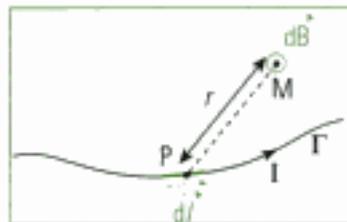


Fig. 2 - Distribution linéique et champ magnétique.

3. Jean-Baptiste Biot (1774-1862), français, est considéré comme un des physiciens les plus féconds de son époque. Ses travaux sur les cristaux ont été décisifs dans la découverte de la polarisation de la lumière (1808-1815). En observant le comportement d'une aiguille aimantée, il a découvert avec Félix Savart la loi donnant le champ magnétique produit par un courant électrique, loi qui prendra leur nom.

4. Félix Savart (1791-1841), Français, s'est intéressé surtout à l'acoustique du violon et a inventé une forme trapézoïdale de violon qui n'aura pas la faveur des musiciens. Il est le co-inventeur avec J.-B. Biot de la loi du magnétisme qui porte leur nom.

5. Au programme de première année ne figurent que les courants linéiques, c'est-à-dire les courants filiformes (l'épaisseur du fil est négligée).

## A. Mise en évidence et définition du champ magnétique

Soit une charge  $q$ , immobile en un point  $M$ , et ne subissant aucune force autre que son poids ; si elle passe au point  $M$  avec la vitesse  $\vec{v}$  et y subit une force  $\vec{f}$ , alors on peut dire qu'il existe au point  $M$  le champ magnétique  $\vec{B}$  qui satisfait la relation :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Cette force (fig. 1) est la force de Lorentz<sup>1</sup>, à partir de laquelle l'existence physique du champ magnétique est prouvée.

### Definition 1

Soit une particule chargée  $q$  passant par un point  $M$ , où elle subit la force  $\vec{f}$  de Lorentz, alors le champ magnétique  $\vec{B}$  au point  $M$  se définit à partir de la force de Lorentz par :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{f}$	force en newton (N)
$q$	charge en coulomb (C)
$\vec{v}$	vitesse ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\vec{B}$	champ magnétique en tesla (T)

L'unité SI du champ magnétique est le tesla (symbole T), exprimé en :

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{A} \cdot \text{s} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Les charges électriques en mouvement sont liées à la notion de champ magnétique, et ce sont d'ailleurs les courants électriques et la matière aimantée qui sont sources de champ magnétique<sup>2</sup>.

## B. Loi de Biot et Savart

La loi de Biot<sup>3</sup> et Savart<sup>4</sup> permet d'effectuer un calcul direct par intégration du champ magnétique créé par une distribution quelconque de courants<sup>5</sup>. Un courant filiforme d'intensité  $I$  suit une ligne nommée  $\Gamma$  (fig.2). On oriente la ligne  $\Gamma$  dans le sens de l'intensité  $I$  qui la parcourt et chaque élément de longueur  $d\vec{l}$  de  $\Gamma$ , centré sur un point  $P$  quelconque et orienté dans le sens de  $I$ , crée en un point  $M$  de l'espace un champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}$  tel que :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

Dans cette expression,  $\vec{r} = \vec{PM}$  et  $\mu_0$  est la perméabilité du vide. Sa valeur est  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  SI et son unité est donnée notamment par celle de la formule

$$\mu_0 = \frac{dB \times r^3}{I \times dl \times r}, \text{ c'est-à-dire mesurée en } \frac{\text{T} \times \text{m}^3}{\text{A} \times \text{m} \times \text{m}}.$$

Le champ magnétique total  $\vec{B}$  est la somme des champs magnétiques élémentaires  $d\vec{B}$  créés par tous les éléments de longueur de la ligne  $\Gamma$  :

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_{P \in \Gamma} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

**Loi de Biot et Savart**

Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M par un courant filiforme d'intensité I circulant le long d'une ligne  $\Gamma$  est la somme des champs magnétiques élémentaires  $d\vec{B}$  créés par chaque élément de longueur  $d\vec{l}$  de  $\Gamma$  et centré sur P :

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_{P \in \Gamma} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$ .

Cette loi doit permettre de calculer le champ magnétique créé par toute distribution de courants en n'importe quel point, mais en pratique, les intégrales à calculer sont souvent extrêmement compliquées et la loi de Biot et Savart n'est utilisée qu'en dernier recours.

**C. Existence et continuité du champ**

On étudie à présent le domaine de définition et de continuité du champ magnétique : le champ existe-t-il en tout point M de l'espace et lorsqu'il existe, est-il continu en ce point ?

Lorsqu'il n'y a aucun courant en M, chacune des composantes du champ est une fonction des coordonnées de M définie et continue partout<sup>6</sup>.

En revanche, cela n'est pas évident en un point M de la ligne  $\Gamma$ . Il y a alors un point P de la distribution pour lequel la distance PM est nulle et une étude mathématique s'impose.

On essaiera de discerner les arguments « purement mathématiques » de continuité et définition, des arguments « physiques » d'existence réelle du caractère filiforme de la distribution étudiée.

Considérons un point M de la distribution (fig. 3). Il faut alors considérer le champ créé en M par l'élément de courant qui s'y trouve, puisque les éléments de courant qui ne se trouvent pas en M ne posent aucun problème pour la définition du champ.

Le point M se trouve à la distance r de l'élément de longueur dl centré sur le point P tel que  $PM = r$ . La distance dl varie comme la distance dr ; ainsi le champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé en M par l'élément de courant se trouvant en P varie comme  $\frac{dr}{r^2}$ . Pour avoir le champ créé en M par le courant qui s'y trouve, on fait tendre r vers zéro en gardant dl constant, ce qui revient physiquement à amener M en P.

On voit alors que le champ devient infini lorsque r s'annule :

**Propriété 1**

**Le champ magnétique n'est donc pas défini (donc ni continu) aux points où se trouve un courant filiforme.**

Ici aussi, la notion de courant filiforme n'a de sens que si « l'épaisseur » de la ligne est très petite devant l'échelle de grandeur de l'observateur.

6. La loi de Biot et Savart fait en effet état d'une écriture fractionnaire dont la primitive est définie et continue en tout point tel que le dénominateur reste non nul.

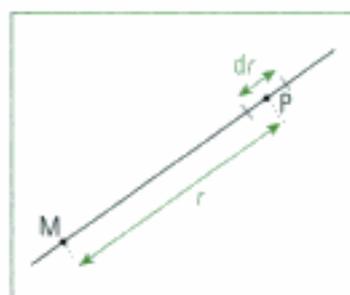


Fig. 3 - Élément dr centré en P.

### Application 1 Le long d'un fil rectiligne

Calculer, par intégration, le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M quelconque de l'espace par un fil rectiligne infiniment long et défini par l'axe (Oz).

#### Solution

On choisit le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz). On définit l'origine O de l'axe par le projeté orthogonal de M sur cet axe.

Le champ magnétique n'est pas défini au niveau des courants, c'est-à-dire sur l'axe (Oz), mais il est défini et continu partout ailleurs : on peut donc le calculer en tout point M n'étant pas sur (Oz).

Un point P de la distribution est centre d'un élément de longueur  $dl = dz$  de l'axe. Le champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par l'élément de courant  $I dl$  se trouvant en P s'écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{u}_z \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

Le champ total est la somme vectorielle des champs élémentaires créés par tous les points P de l'axe. Dans la base cylindrique, on a :

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = r \vec{u}_r - z \vec{u}_z, \text{ avec } PM = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Le champ élémentaire vaut donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I r dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \vec{u}_\theta.$$

Le champ magnétique n'a donc qu'une composante. Le champ total est :

$$B_\theta = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I r dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3},$$

le vecteur  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique restant inchangé lorsque le point P décrit l'axe (Oz), vu que M est fixe.

Calculer une intégrale avec des bornes infinies (intégrale indéfinie) étant difficile, on change donc de variable en prenant l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\tan \alpha = \frac{z}{r}.$$

On a alors :

$$d(\tan \alpha) = (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \frac{dz}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{r}, \text{ car } r \text{ reste inchangé.}$$

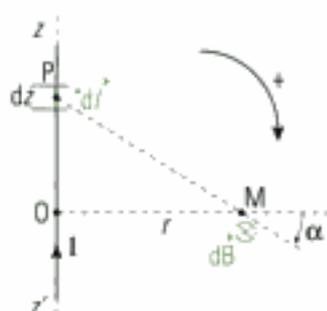
Lorsque  $z \rightarrow -\infty$ , alors  $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ , et lorsque  $z \rightarrow +\infty$ , on a  $\alpha \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ .

La composante du champ peut maintenant être calculée, en substituant  $z = r \tan \alpha$ ,  $dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  et  $\sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\cos \alpha}$  dans l'intégrale :

$$B_\theta = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I r}{4\pi \left(\frac{r}{\cos \alpha}\right)^3} \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha=-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \sin \alpha \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

L'expression finale du champ magnétique en M est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$



7. Physiquement, la portion rectiligne de fil a une longueur très grande devant la distance  $r$  du point  $M$  à ce fil, de sorte que vue de  $M$ , cette portion paraît infiniment longue.

8. L'application 2 revient sur le choix de ce système de coordonnées pour ce dispositif.

9. Le sens positif de  $\alpha$  est choisi pour que le lien entre  $\alpha$  et  $z$  soit celui indiqué.

10. On dit conventionnellement que l'orientation de l'espace est directe lorsque les trois vecteurs qui constituent sa base ont le sens des trois doigts de la main droite (fig 4.a) : le produit vectoriel des deux premiers est égal au troisième. Une orientation indirecte correspond aux trois doigts de la main gauche (fig 4.b).

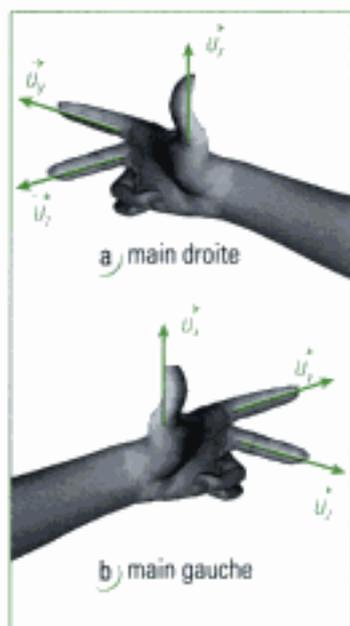


Fig. 4 - a : trièdre direct ; b : trièdre indirect.

11. Par exemple, la symétrie par rapport au plan  $Oxy$  laisse les deux premiers vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  de la base inchangés, alors que le troisième  $\vec{u}_z$  change de sens.

12. Sur l'exemple schématisé, il s'agit de deux boucles de courant symétriques.

## D. Topographie du champ magnétique

Certaines considérations de symétrie et d'invariance pourraient nous permettre de connaître *a priori* la direction et le sens du vecteur champ magnétique créé par une distribution de courants, et les variables dont dépend sa valeur.

### D.1. Pseudo vecteur

La relation qui a servi à définir le vecteur champ magnétique (la force de Lorentz), comme toutes les relations vectorielles où le champ magnétique intervient (loi de Biot et Savart par exemple), contient un produit vectoriel.

Considérons par exemple la force de Lorentz  $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Les vecteurs force et vitesse sont des vrais vecteurs : leur sens ne change pas si on change l'orientation de l'espace<sup>10</sup>. Comme le sens d'un produit vectoriel dépend de l'orientation de l'espace choisie, le sens du vecteur champ magnétique en dépend.

On peut donc considérer que le vecteur champ magnétique n'est en fait qu'un être mathématique inventé de toutes pièces pour justifier des effets physiques observés : son sens physique n'en est que d'autant plus discutable...

Physiquement, le vecteur champ magnétique n'existe pas, puisque son sens dépend de conventions purement mathématiques, à savoir l'orientation de l'espace (qui n'a pas d'existence physique). Il devient précisément défini lorsque l'on a conventionnellement choisi l'orientation de l'espace : toute base orthonormée sera désormais directe, c'est-à-dire telle que ses trois vecteurs ont des sens conformes aux trois doigts de la main droite.

### D.2. Considérations de symétrie

Une symétrie plane est une isométrie négative, car elle change l'orientation de l'espace. En effet, une base directe devient, après que l'on a transformé ses trois vecteurs par symétrie plane, une base indirecte<sup>11</sup>.

#### D.2.1 - Plans de symétrie

Considérons un point  $M$  auquel on cherche la direction du champ magnétique créé par une distribution de courants (fig. 5)<sup>12</sup>.

Supposons qu'il existe un plan  $\pi$  contenant  $M$  et laissant la distribution de courants inchangée par symétrie par rapport à ce plan. Le point  $M$ , inchangé, « voit » la même distributions de courants qu'avant la symétrie, mais l'orientation de l'espace a changé : le champ magnétique au point  $M$  change alors de sens dans cette symétrie. Les deux vecteurs champ magnétique avant et après la symétrie doivent donc être symétriques et de sens opposés : ils sont orthogonaux au plan  $\pi$ , car seuls les vecteurs orthogonaux au plan de symétrie sont changés en leurs opposés par symétrie par rapport à ce plan.

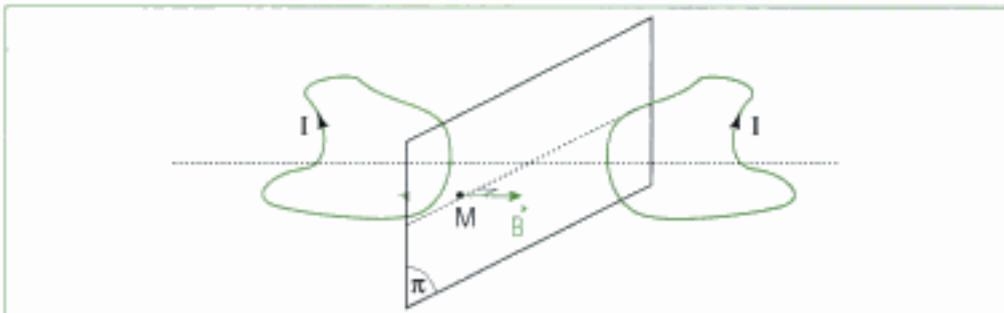


Fig. 5 -  $\pi$  est un plan de symétrie.

13. Il suffit donc de trouver un seul plan de symétrie pour les courants et passant par M pour connaître la direction du champ magnétique en M.

14. On peut aussi dire qu'ils ont changé de signe.

15. Ne pas oublier que le point M où l'on cherche le champ doit faire partie des plans d'antisymétrie.

#### Propriété 2

La direction du champ magnétique en M est celle de la droite orthogonale à un plan  $\pi$  de symétrie pour la distribution de courants et passant par M<sup>13</sup>.

Si le point M ne fait pas partie du plan de symétrie  $\pi$  trouvé, alors aucune information sur la direction du champ ne peut être trouvée. En effet, la seule conclusion est que le champ au symétrique de M est le vecteur opposé du vecteur symétrique du champ existant en M. Une argumentation de ce type permet de trouver la parité du champ magnétique, une fois que l'on en connaît la direction.

### D.2.2 – Plans d'antisymétrie

Considérons un point M. On cherche la direction du champ magnétique créé par une distribution de courants en ce point.

Supposons qu'il existe un plan  $\pi'$  contenant M et transformant la distribution de courants en une distribution exactement opposée par symétrie par rapport à ce plan. Le point M, inchangé, « voit » la même distribution de courants que celle existant avant la symétrie, à cela près que les courants vont en sens contraire<sup>14</sup> : le champ magnétique au point M doit changer de signe de ce fait, mais doit encore changer de signe à cause de l'orientation de l'espace qui a changé dans la symétrie. Au final, ce double changement de signe montre que le champ magnétique reste inchangé : il est donc inclus dans le plan  $\pi'$  d'antisymétrie<sup>15</sup> (fig. 6).

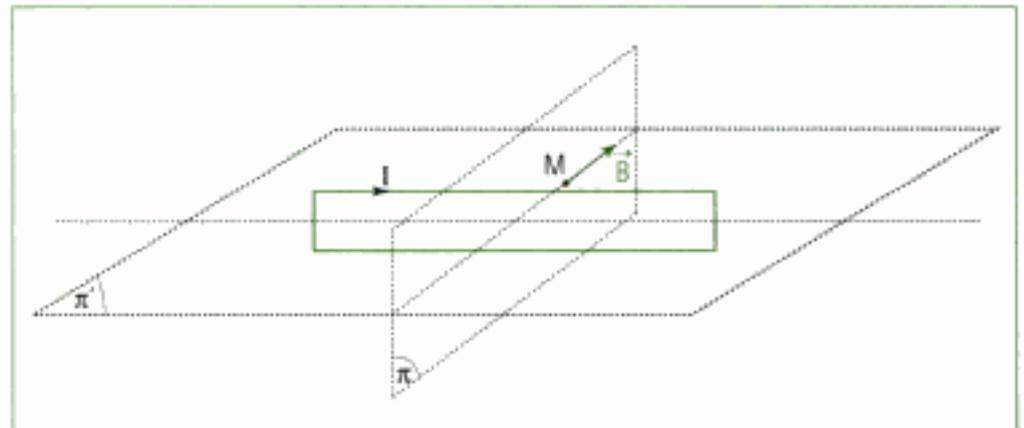


Fig. 6 -  $\pi$  et  $\pi'$  sont des plans d'antisymétrie.

#### Propriété 3

Le vecteur champ magnétique en M est inclus dans tout plan  $\pi'$  d'antisymétrie pour la distribution de courants et passant par M.

Si on a pu trouver un deuxième plan d'antisymétrie, le champ magnétique est inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection qui est une droite (fig. 6).

#### Propriété 4

La direction du champ magnétique en un point M est celle de la droite intersection d'au moins deux plans d'antisymétrie pour la distribution de courants et passant par M.

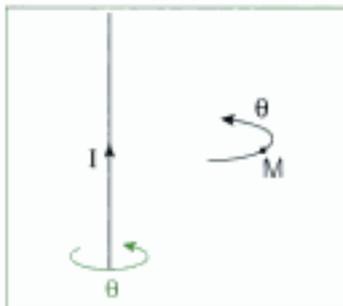


Fig. 7 - Distribution linéique.

16. Comme il n'est pas nécessaire de connaître la direction du champ pour faire cette conclusion, c'est donc le module  $B$  du champ qui ne dépend pas de  $\theta$ .

17. Le mouvement étant relatif, on peut aussi dire que la rotation de  $M$  (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de courants qu'il « voit ». Donc le module  $B$  du champ en  $M$  ne peut dépendre de l'angle qui définit cette rotation.

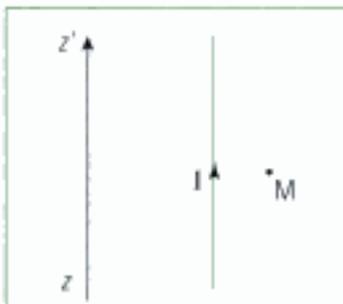


Fig. 8 - Fil infiniment long.

18. On peut aussi dire que la translation de  $M$  (à distribution fixe) n'a aucune influence sur la distribution de courants « qu'il voit ». Donc le module du champ en  $M$  ne peut dépendre de la coordonnée qui définit cette translation.

19. Cette conclusion peut se faire même si on ne connaît pas la direction du champ en  $M$ . Donc, c'est son module qui est indépendant de  $z$ .

20. C'est un modèle qui traduit physiquement le fait que la distance du point  $M$  aux courants est suffisamment petite devant la dimension de la distribution. Pour un observateur placé en  $M$ , la distribution paraît d'extension infinie.

21. Un exemple est donné dans l'application 2 qui suit.

## D.3. Considérations d'invariance

### D.3.1 - Rotations autour d'un axe

S'il existe un axe autour duquel une rotation d'angle  $\theta$  laisse invariante la distribution de courants (le point  $M$  n'étant pas nécessairement invariant dans cette rotation), alors la valeur  $B$  du champ magnétique en  $M$  ne dépend pas de l'angle  $\theta$  correspondant à cette rotation (ou de la coordonnée d'espace correspondant à cet angle).

Sur la fig. 7, la distribution est un fil rectiligne infini et celui-ci reste invariant par toute rotation d'angle  $\theta$  autour de son axe de révolution (lui-même). Donc le champ<sup>16</sup> au point  $M$  ne dépend pas de  $\theta$ .

En effet, un point  $M$  fixe « voit » alors le même fil, alors que celui-ci a effectué une rotation<sup>17</sup>.

### D.3.2 - Translations selon une direction

S'il existe une direction pour laquelle toute translation laisse invariante la distribution de courants (le point  $M$  n'étant pas nécessairement invariant dans cette translation), alors la valeur du champ en  $M$  ne dépend pas de la variable d'espace qui définit la direction de cette translation.

En effet, un point  $M$  fixe « voit » alors la même distribution, alors que celle-ci a effectué une translation<sup>18</sup>.

Sur la fig. 8, on suppose que la distribution de courants est un fil « infiniment long » dans la direction de  $(z'z)$ . Une translation dans cette direction la laisse donc invariante.

Donc le champ en  $M$  ne dépend pas de  $z$ <sup>19</sup>.

L'invariance par translation ne peut exister que si la distribution de courants est illimitée dans la direction de la translation<sup>20</sup>. Lorsqu'il n'y a pas de courants « à l'infini », il ne peut y avoir aucune invariance par translation.

#### Propriété 5

Si une distribution de courants reste invariante par une translation ou par une rotation, alors la valeur  $B$  du champ magnétique en tout point  $M$  ne dépend pas de la coordonnée correspondant à cette translation ou rotation.

## D.4. Sens du vecteur champ magnétique

Après avoir déterminé la direction du champ magnétique, et après avoir fait les considérations de symétrie, on doit pouvoir, sans peine, déterminer le sens de ce champ  $\vec{B}$  en un point  $M$  quelconque.

On utilise pour cela la règle dite « du tire-bouchon ». Celui-ci relie un sens de rotation et un sens de translation. En associant une des deux opérations au courant (rotation ou translation), l'autre opération (translation ou rotation) donne le sens du champ magnétique (fig. 9).

Si le courant suit une boucle fermée, alors on associe la rotation du tire-bouchon au sens du courant : il se translate alors dans un sens qui est celui de  $\vec{B}$ .

Si le courant part à l'infini, alors on lui associe la translation du tire-bouchon : il tourne alors dans un sens qui donne celui<sup>21</sup> de  $\vec{B}$ .

On peut aussi utiliser la règle dite « du bonhomme d'Ampère » ou « de la main droite ». On aligne le bonhomme d'Ampère (ou la main droite) sur le courant, celui-ci entre par les pieds (ou par le poignet) et sort par la tête (le bout des doigts de la main droite). Lorsque le bonhomme (ou la paume de

Hidden page

22. En effet, le plan de symétrie est facilement identifié, si l'on prend l'axe du fil comme axe  $(Oz)$  :  $\pi_1 = (M; \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Le système des coordonnées cylindriques est donc bien adapté à ce dispositif.

23. Une seule invariance par rotation autour d'un axe pousse à choisir ce système de coordonnées, dans lequel le seul angle est défini par la rotation autour d'un axe.

24. On effectue de manière totalement indépendante chacun des deux types de considérations. Les invariances permettent de choisir les variables dont dépend le module du champ  $\vec{B}$  sans en connaître la direction ; les symétries permettent de déterminer la direction du champ sans connaître les variations de son module.

25. Il faut bien faire attention à ce que le bonhomme d'Ampère regarde le point  $M$  où l'on cherche le sens du champ  $\vec{B}$ , ou que la paume de la main droite « regarde » ce point.

26. Elles peuvent être déterminées analytiquement en exprimant par le calcul la propriété qui les définit, mais une telle étude est hors du programme.

27. Il est alors nécessairement continu.

## E. Lignes de champ

On peut tracer les lignes<sup>26</sup> de champ magnétique dans tout l'espace où le champ reste défini<sup>27</sup>.

### Loi 2

Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points  $M$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  leur est tangent.

Le long d'une ligne de champ, la valeur  $B$  du champ peut varier. Le tracé d'une carte de lignes de champ ne permet donc que d'en connaître en un coup d'œil la direction en tout point. On oriente chaque ligne de champ par une flèche donnant le sens du champ sur la ligne.

Pour donner un exemple du tracé des lignes de champ, on reprend l'exemple développé dans les applications 1 et 2 de ce chapitre. Il s'agit du fil rectiligne infiniment long et parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

On a  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$  : le champ est orthoradial et les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur le fil (fig. 13). On remarque que le long d'une ligne de champ, la valeur de  $r$  reste fixée : la valeur  $B$  du champ magnétique est constante le long de la ligne de champ.

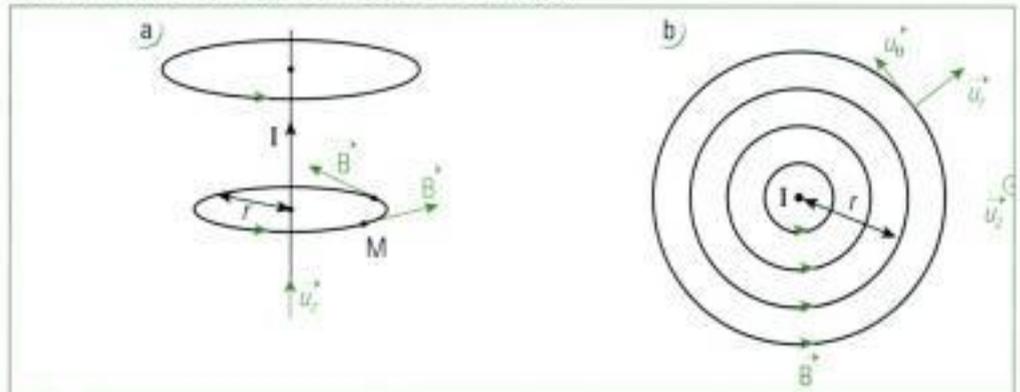


Fig. 13 - a : Lignes d'un champ magnétique orthoradial. b : Vue de dessus.

28. Le flux du champ électrostatique sert à mettre en œuvre le théorème de Gauss.

29. Pour plus de détails, voir le chapitre 2, paragraphe D.1.

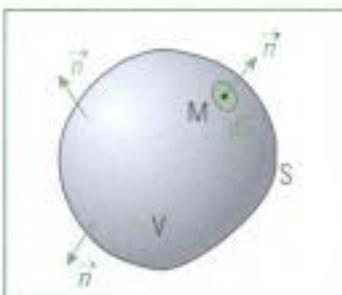


Fig. 14 - Surface fermée.

## F. Flux du champ magnétique

Le flux a été défini dans le chapitre 2 dans l'étude du champ électrostatique<sup>28</sup>.

On rappelle que le flux  $\phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface  $S$  est la somme de tous les flux élémentaires  $d\phi$  à travers tous les éléments de surface  $dS$  qui constituent  $S$  :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ , suffisamment petit pour que l'on puisse le considérer comme plan<sup>29</sup>.

### F.1. Cas d'une surface fermée

Soit  $S$  une surface fermée quelconque délimitant un volume  $V$  et les vecteurs unitaires normaux en tout point de  $S$  sont pris conventionnellement sortants (fig. 14).

Le champ magnétique possède la propriété très générale suivante :

**Loi 3**

Le champ magnétique est à flux conservatif, c'est-à-dire son flux à travers toute surface fermée est nul<sup>30</sup> :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

30. Contrairement à ce qui se passe pour le champ magnétique, on rappelle que le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée n'est nul que si le volume  $V$  qu'elle délimite ne contient aucune charge (source de champ électrostatique). Le champ électrostatique n'est donc *a priori* pas à flux conservatif.

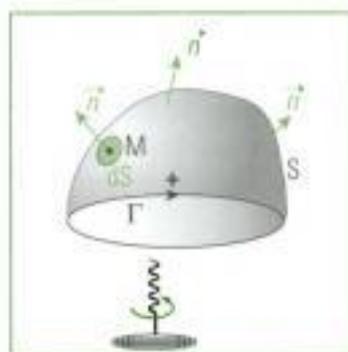


Fig. 15 - Surface ouverte.

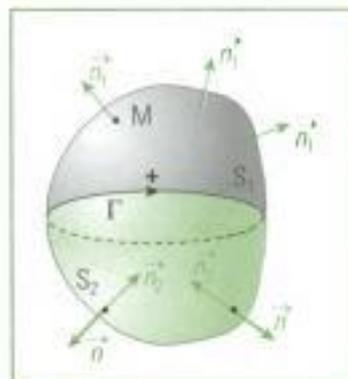


Fig. 16 - La surface  $S$  est l'assemblage de deux surfaces ouvertes.

31. On peut imaginer qu'elle est engendrée par un ensemble de lignes de champ qui se touchent.

32. La normale sortante de la surface fermée au niveau de  $S_1$  est  $-\vec{n}_1$ .

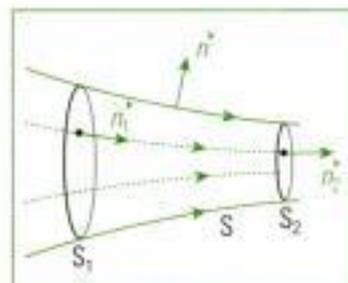


Fig. 17 - Tube de champ.

## F.2. Cas d'une surface ouverte

Une surface est ouverte si on peut trouver une ligne fermée (ou contour)  $\Gamma$  sur lequel elle s'appuie. On peut toujours choisir un sens « + » pour orienter le contour  $\Gamma$ , c'est-à-dire pour un parcours le long de  $\Gamma$ .

Le sens de la normale  $\vec{n}$  en tout point d'une surface ouverte est lié au sens positif choisi pour orienter le contour sur lequel la surface ouverte  $S$  s'appuie. La règle dite « du tire-bouchon » donne le sens de  $\vec{n}$  (fig. 15) : en tournant le tire-bouchon dans le sens positif d'orientation de  $\Gamma$ , il se translatera dans un sens tel que l'on peut déterminer le sens de  $\vec{n}$ .

Une surface fermée  $S$  peut être considérée comme l'assemblage de deux surfaces ouvertes  $S_1$  et  $S_2$  reposant toutes deux sur le même contour  $\Gamma$ . Le vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  en tout point de  $S$  est conventionnellement sortant. Pour  $S_1$  et  $S_2$ , le sens du vecteur unitaire normal  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  en tout point est défini à partir de l'orientation choisie pour le contour  $\Gamma$  sur lequel elles reposent.

Sur la fig. 16, on a  $\vec{n}_1 = \vec{n}$  et  $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ . Écrivons la propriété du flux magnétique nul à travers  $S$  :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_2) dS, \\ \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS &= \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS, \text{ soit } \phi_1 = \phi_2. \end{aligned}$$

Le flux du champ magnétique est le même à travers  $S_1$  et  $S_2$  : il ne dépend que du contour  $\Gamma$  sur lequel ces surfaces s'appuient. Voilà pourquoi on dit que le champ magnétique est à flux conservatif.

## F.3. Conséquence : interprétation des lignes de champ de champ

Considérons un tube de champ (fig. 17), c'est-à-dire un volume délimité par des surfaces  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  telles que la surface  $S$  est tangente aux lignes de champ en tout point<sup>31</sup>, alors que  $S_1$  et  $S_2$  restent perpendiculaires aux lignes de champ.

On suppose qu'en tout point de la section  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ), le champ magnétique est orthogonal à  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) et garde un module constant  $B_1$  (respectivement  $B_2$ ) :

$$\vec{B}_1 = B_1 \vec{n}_1 \text{ et } \vec{B}_2 = B_2 \vec{n}_2.$$

Écrivons la nullité du flux total à travers la surface fermée constituée par l'assemblage des surfaces  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$ <sup>32</sup> :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_1) dS + \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

ce qui donne  $B_2 S_2 - B_1 S_1 + 0 = 0$ , soit  $B_2 = \frac{B_1 S_1}{S_2}$ .

Donc lorsque les lignes de champ se resserrent ( $S_2 < S_1$ ), la valeur du champ magnétique augmente. La vision d'une carte de lignes de champ magnétique permet donc d'en connaître la direction (celle de la tangente aux lignes de champ) et l'évolution de sa valeur le long de la ligne de champ, selon que les lignes se resserrent ou s'écartent.

33. André-Marie Ampère (1775-1836), Français, a participé à l'élaboration du magnétisme : il en a confirmé l'origine électrique (courants), a retrouvé la loi de Biot et Savart et a créé des dispositifs mettant en action les forces magnétiques. Il a inventé le solénoïde et est à l'origine de l'interprétation de l'aimantation.

34. Les considérations de symétrie ont permis de trouver la forme des lignes de champ.

35. Les considérations d'invariance sont à l'origine de cette hypothèse.

36. C'est le cas par exemple pour le fil rectiligne (voir paragraphe E).

37. La démonstration de ce théorème nécessite la connaissance des équations de Maxwell (introduites en seconde année) et reste admis en première année.

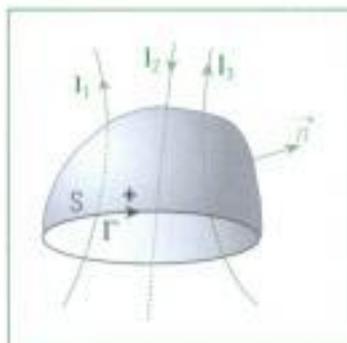


Fig. 18 - Surface S s'appuyant sur un contour  $\Gamma$ .

## G. Théorème d'Ampère<sup>33</sup>

Ce théorème est l'équivalent en magnétostatique du théorème de Gauss en électrostatique. Il permet de déterminer le module  $B = \|\vec{B}\|$  du champ magnétique lorsque l'on en connaît la direction et le sens.

### G.1. Circulation du champ magnétique

Supposons que les considérations de symétrie et d'invariance ont permis de connaître la topographie du champ magnétique  $\vec{B}$ . En un point M quelconque de l'espace où on cherche le champ magnétique, il passe une ligne de champ connue<sup>34</sup>, le long de laquelle on suppose que le module B du champ magnétique  $\vec{B}$  reste inchangé<sup>35</sup>.

On exprime la circulation C du champ magnétique  $\vec{B}$  sur une ligne fermée  $\Gamma$  définie par une ligne de champ si les lignes de champ sont fermées<sup>36</sup>, ou, si les lignes de champ ne sont pas fermées, par une portion de ligne de champ complétée par une ligne orthogonale à  $\vec{B}$  en chacun de ses points. En notant L la longueur de la ligne de champ considérée :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} B \times dl = B \int_{\Gamma} dl = B \times L,$$

où la ligne de champ a été orientée dans le sens du champ magnétique  $\vec{B}$ , de sorte que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times dl$ .

Si la ligne de champ n'était pas fermée, alors la portion de  $\Gamma$  n'appartenant pas à la ligne de champ apporte une contribution nulle à la circulation, car  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont orthogonaux (par choix préalable) et  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ .

### G.2. Formulation du théorème

Le théorème d'Ampère relie la circulation du champ magnétique le long d'une ligne fermée (contour)  $\Gamma$  à l'intensité I du courant électrique qui traverse ce contour, ou plus précisément qui traverse une surface ouverte S s'appuyant sur ce contour<sup>37</sup>.

Pour calculer la circulation du champ magnétique, il est nécessaire d'orienter le contour. Le sens de la normale en tout point de S est alors défini (règle du tire-bouchon).

Les intensités des courants qui traversent S doivent être comptées algébriquement : positivement si la traversée a lieu dans le sens de la normale, et négativement dans le sens contraire. Ainsi, pour les intensités de la fig. 18,  $I_1$  et  $I_3$  sont comptés positivement et  $I_2$  négativement, donc :

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{tr}} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3),$$

où  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont positifs.

Hidden page

# L'essentiel

## ✓ Définition

- Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini à partir de la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

C'est un pseudo vecteur, ou vecteur axial.

- Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M par une distribution filiforme de courants d'intensité I et se trouvant sur une ligne  $\Gamma$  s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  n'est pas défini sur les courants filiformes.

## ✓ Considérations de symétrie et d'invariance

- Lorsque la distribution de courants reste inchangée dans une symétrie plane, le champ  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan pour tout point du plan.
- Lorsque la distribution de courants change de signe dans une symétrie plane, le champ  $\vec{B}$  est inclus dans ce plan pour tout point du plan.
- Lorsqu'une distribution est invariante par une translation ou une rotation, le module B du champ  $\vec{B}$  ne dépend pas de la variable correspondante.

## ✓ Flux et circulation du champ magnétique

- Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface S s'écrit :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à l'élément de surface dS.

- Le flux magnétique à travers toute surface fermée est nul.
- Le flux magnétique à travers une surface ouverte S ne dépend que de la ligne fermée  $\Gamma$  sur laquelle la surface S s'appuie.
- La circulation du champ magnétique  $\vec{B}$  le long d'une ligne  $\Gamma$  s'écrit :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

où  $d\vec{l}$  est un élément de longueur de la ligne dont le sens dépend du choix de l'orientation de  $\Gamma$ .

## ✓ Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère relie la circulation C du champ  $\vec{B}$  le long d'un contour  $\Gamma$  et l'intensité  $I_{alg}$  (comptée positivement si elle traverse S dans le sens de sa normale) du courant qui traverse toute surface ouverte S s'appuyant sur  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{alg}.$$

Hidden page

## Méthode n° 2

### Comment déterminer l'expression d'un champ magnétique ?

On cherche l'expression vectorielle du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point M intérieur au solénoïde présenté dans la méthode n° 1.

On admet que  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur. Le solénoïde compte  $n$  spires par mètre.

#### → Savoir faire

① Effectuer des considérations de symétrie et d'invariance pour connaître la topographie du champ. En déduire le choix d'un système de coordonnées (méthode n° 1).

② S'il existe une ligne fermée passant par M telle que la circulation du champ  $\vec{B}$  est proportionnelle à son module  $B$ , alors appliquer le théorème d'Ampère. Pour trouver une telle ligne fermée, chercher une ligne de champ sur laquelle  $B$  reste constant et la compléter éventuellement avec des lignes le long desquelles la circulation de  $\vec{B}$  est nulle.

S'il n'existe pas de telle ligne fermée, alors poser la loi de Biot et Savart qui donne l'intégrale du calcul « direct » du champ  $\vec{B}$ .

③ Si la ligne fermée a pu être trouvée, alors appliquer le théorème, en déduire la valeur de  $B$ , puis l'expression de  $\vec{B}$ .

Si la ligne fermée n'a pu être trouvée, alors projeter l'intégrale permettant le calcul direct du champ  $\vec{B}$  sur les directions dans lesquelles on sait que la projection de  $\vec{B}$  est non nulle. Faire le calcul de chacune des intégrales (scalaires). En déduire l'expression de  $\vec{B}$ .

#### → Application 1

En reprenant le cas du solénoïde présenté dans la méthode n° 1, déterminer l'expression vectorielle du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point M intérieur au solénoïde. On admet que  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur. Le solénoïde compte  $n$  spires par mètre.

#### Solution

① La méthode n° 1 a permis de trouver  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$ , dans un système de coordonnées cylindriques tel que l'axe du solénoïde est l'axe  $(Oz)$ .

②  $B$  reste constant lorsque  $r$  reste constant. Sur une ligne de champ (droite parallèle à  $(Oz)$ ),  $B$  reste constant, mais cette ligne n'est pas fermée.

On construit donc la ligne fermée ACDE en complétant la portion de ligne de champ CD par deux côtés AC et DE orthogonaux au champ  $\vec{B}$  et par le dernier côté EA le long duquel  $\vec{B} = \vec{0}$ , car externe au solénoïde.

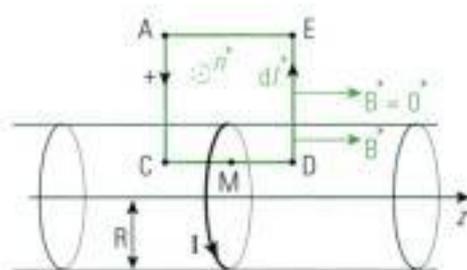
On a donc une ligne fermée rectangulaire, sur laquelle s'appuie la surface du rectangle. Celui-ci est traversé par des spires, donc le théorème d'Ampère va aboutir.

③ La circulation de  $\vec{B}$  n'est non nulle que le long du segment CD : on oriente le contour de telle manière que sur le segment CD  $a$ ,  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont de même sens. Calculons la circulation du champ magnétique :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + B \times a + 0 + 0.$$

En effet,  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$  en tout point de AC et de DE et  $\vec{B} = \vec{0}$  sur EA.

Pour calculer l'intensité qui traverse le rectangle ACDE, il faut compter les spires qui le traversent. Il y en a  $N = n \times a$ , car  $n$  est un nombre de spires par mètre. L'intensité correspondante vaut donc



$nI$ , soit  $naI$ , à compter positivement car traversant le rectangle dans le sens de la normale  $\vec{n}$ . Le théorème d'Ampère s'écrit maintenant :

$$\int_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = aB = \mu_0 nI = \mu_0 naI, \text{ soit } B = \mu_0 nI.$$

Finalement, en tout point intérieur au solénoïde :

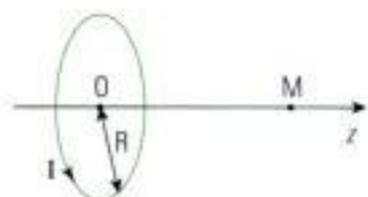
$$\vec{B} = \mu_0 nI \vec{u}_z.$$



- Le champ ne dépend pas de  $r$ , ce que les considérations d'invariance ne laissaient pas prévoir.
- La longueur du segment CD n'a aucune influence.

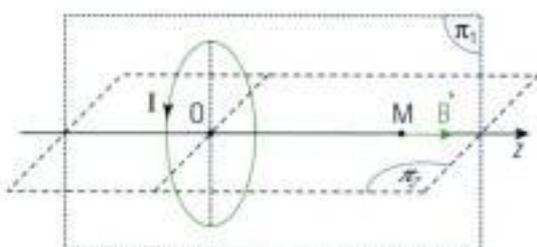
## → Application 2

Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  (direction, sens et module) en tout point M de l'axe de révolution d'une spire de centre O et de rayon R parcourue par un courant d'intensité I constante.



### Solution

① On applique la méthode n° 1. Tout plan contenant l'axe de révolution de la spire contient M et est plan d'antisymétrie pour la spire (on montre deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ) : le champ magnétique en M est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire l'axe de révolution du disque. On nomme (Oz) cet axe, l'origine O étant le centre de la spire. *A priori*, on choisirait un système de coordonnées cylindriques ou cartésiennes, mais la forme de la distribution nous amène à préférer les coordonnées cylindriques.



De plus, la spire est invariante par rotation autour de l'axe : c'est donc bien les coordonnées cylindriques qu'il faut choisir, (Oz) étant l'axe du disque autour duquel il y a invariance par rotation (axe « de révolution »).

Le point M étant nécessairement sur l'axe, la seule variable est alors sa cote  $z$  et on écrit :

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z,$$

son sens étant donné par la règle du tir-bouchon ( $B(z)$  sera donc positif).

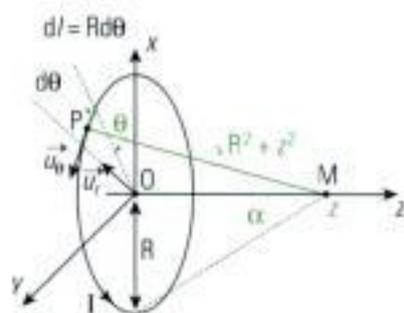
② On ne connaît pas la direction de  $\vec{B}$  en tout point M hors de l'axe (Oz) : la topographie du champ est peu connue et quelle que soit la ligne fermée choisie, on ne pourra pas exprimer  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Par conséquent, le théorème d'Ampère ne peut pas être utilisé ici et il faut calculer par intégration, à l'aide de la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \text{spire}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \text{spire}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}, \text{ où } \vec{PM} = PM \vec{u} = r\vec{u}.$$

③ Le champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par l'élément de longueur  $d\vec{l}$  de la spire dans la base cartésienne est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3},$$

avec  $d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta = R d\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$  dans la base cartésienne.



et  $\vec{PM} = (\vec{PO} + \vec{OM}) = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$  dans la base cartésienne ;

$$\text{donc : } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} R d\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3} R d\theta \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ R \end{pmatrix}.$$

Le champ total est obtenu par intégration pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$  :

$$B_x = \frac{\mu_0 I z R}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0,$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I z R}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3},$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

Mais on sait que le champ résultant est dirigé suivant  $(Oz)$ . Il suffit de projeter chaque champ élémentaire sur cet axe pour avoir sa contribution au champ total :

$$dB_z = d\vec{B} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} [R d\theta \vec{u}_\theta \wedge (-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z)] \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} [R^2 d\theta \vec{u}_z + R z d\theta \vec{u}_r] \cdot \vec{u}_z,$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I R^2 d\theta}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3}.$$

Ainsi, il vient bien plus rapidement :

$$\vec{B} = \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} dB_z \right) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

On peut aussi exprimer ce champ non pas en fonction de  $z$ , mais en fonction du demi-angle  $\alpha$  sous lequel depuis  $M$ , on voit la spire. On voit que :

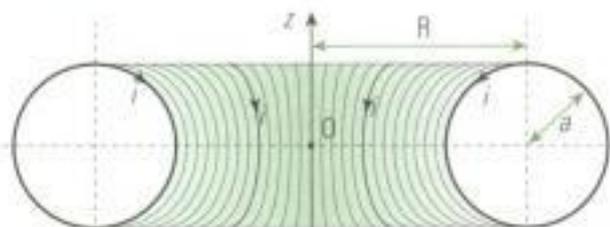
$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \text{ et par suite } \vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R} \vec{u}_z.$$

# Exercices

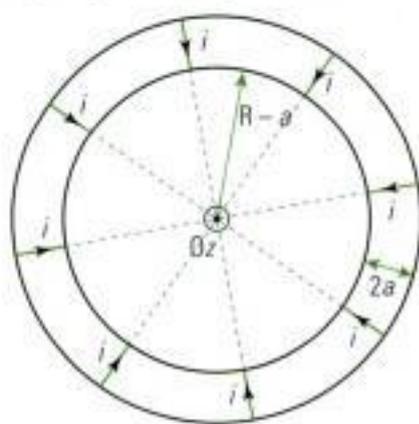
## Niveau 1

### Ex. 1 Tore circulaire

On veut étudier le champ magnétique créé par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon  $R$  à section circulaire de rayon  $a$ . On note  $O$  le centre du tore et  $(Oz)$  son axe de révolution. Une chambre à air gonflée, de vélo par exemple, constitue un tel tore.



La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de  $N$  spires jointives circulaires de rayon  $a$  enroulées sur toute la surface du tore, le sens du courant étant donné sur la figure. On négligera l'épaisseur des fils. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par cette distribution.



1) Étude qualitative

a) Quel est le domaine de définition du champ magnétique ? Dans toute la suite, on considère un point  $M$  appartenant à ce domaine.

b) Quelle est la direction de  $\vec{B}$  en  $M$  ? Justifier la réponse.

c) Que vaut  $\vec{B}$  au point  $O$  ?

d) Justifier le choix du système de coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . De quelle(s) coordonnée(s) dépend le module  $B$  du champ ?

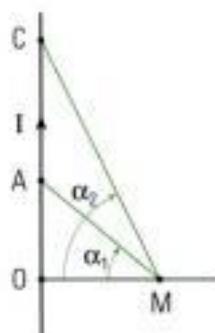
2) Montrer qu'en tout point situé à l'extérieur du tore,  $\vec{B}$  est nul.

3) Déterminer l'expression de  $\vec{B}$  en un point quelconque de l'intérieur du tore.

### Ex. 2 Portion de fil

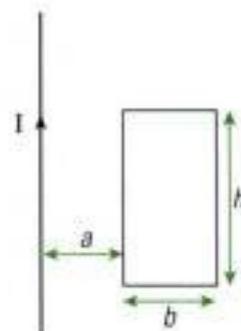
Une portion  $AC$  de fil rectiligne a pour longueur  $L$  et est parcourue par un courant d'intensité  $I$  constante.

Déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce segment en tout point  $M$  où il est défini. On l'exprimera en fonction des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  définis sur la figure ci-contre.



### Ex. 3 Fil et rectangle

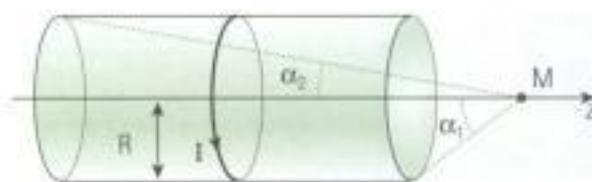
Déterminer l'expression du flux  $\phi$  du champ magnétique créé par un fil rectiligne illimité parcouru par un courant d'intensité  $I$ , à travers un rectangle dont le plan contient le fil, de dimensions  $h$  (parallèle au fil) et  $b$  (perpendiculaire au fil), le côté le plus proche du fil se trouvant à la distance  $a$ .



## Niveau 2

### Ex. 4 Solénoïde

On considère un solénoïde (fini) de longueur  $L$  et comprenant  $N$  spires, chacune étant parcourue par un courant d'intensité  $I$  constante. Ces spires sont circulaires de rayon  $R$  et sont régulièrement enroulées sur un cylindre de révolution autour de l'axe  $(z'z)$ . On cherche à déterminer complètement le champ magnétique en un point  $M$  quelconque de l'axe  $(z'z)$ .



1) Soit une longueur élémentaire  $dz$  de l'axe  $(z'z)$  où se trouve le solénoïde.

Quel nombre élémentaire  $dN$  de spires se trouvent entre la cote  $z$  et la cote  $z + dz$  ?

Hidden page

a) Justifier qu'au point  $M'$ , le champ n'ait pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$  et que son module ne dépend pas de  $\theta$ .

b) La distance  $r$  est suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que la composante de  $\vec{B}$  selon la direction de l'axe  $(Oz)$  en  $M'$  reste inchangée et égale à celle du champ au point  $M$ . On considère une surface fermée élémentaire constituée par un

cylindre droit d'axe de révolution  $(Oz)$ , de rayon  $r$  et dont les bases se situent aux cotes  $z$  et  $z + dz$ .

Montrer que le flux magnétique élémentaire  $d\phi$  à travers cette surface fermée élémentaire s'écrit :

$$d\phi = \pi r^2 dz \left( \frac{dB_z}{dz} + \frac{2}{r} B_r \right).$$

c) En déduire l'expression de  $B_r$  en fonction de  $B_z$ , puis en fonction de  $r$  et de  $z$ .

## Indications

### Ex. 1

- 1) c) Examiner toutes les symétries possibles.
- 2) et 3) Appliquer le théorème d'Ampère.

### Ex. 2

Ce circuit est impossible... Effectuer un calcul direct.

### Ex. 4 et Ex. 5

Faire une sommation des champs des spires, en préférant la variable angulaire.

### Ex. 6

Chercher la direction du champ résultant et effectuer les quatre projections.

### Ex. 7

Il faut sommer les champs créés par les différents fils, mais après avoir projeté les expressions vectorielles !

### Ex. 8

Penser à la notation « différentielle » d'une dérivée :

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}, \text{ avec } dx \rightarrow 0.$$

Hidden page

## Exercice 2

On commence par étudier la topographie du champ magnétique. On ne voit qu'un plan de symétrie pour le courant et passant par M : le plan contenant le segment AC et M (figure ci-contre).

De plus, on constate l'invariance de la distribution par rotation autour de l'axe du segment AC. On choisit donc le système des coordonnées cylindriques, l'axe (Oz) contenant le segment AC.

Le plan de symétrie est alors le plan  $(M; \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ , et l'invariance par rotation autour de (Oz) montre que la valeur B du champ ne dépend pas de  $\theta$  :

$$\vec{B}(M) = B(r, z)\vec{u}_\theta.$$

Comme les lignes de champ sont connues partout, on est tenté d'appliquer le théorème d'Ampère, en choisissant une ligne de champ comme « contour d'Ampère ».

En fait, le théorème donnera ici un résultat faux, car pour le point M de la figure, le contour d'Ampère serait un cercle centré sur l'axe (Oz) et le disque qui s'appuie dessus ne serait traversé par aucun courant. On trouverait alors  $\vec{B} = \vec{0}$ .

Comme le segment est fini, on pourrait trouver, quelle que soit la position de M, une surface s'appuyant sur le cercle et suffisamment « haute » pour n'être pas coupée par le segment AC.

On concède qu'il est impossible que  $\vec{B}$  soit nul en tout point.

L'explication est que ce segment ne peut exister seul car il faut bien que le courant vienne de quelque part et aille autre part : on a caché une partie du circuit, ce qui nous empêche d'appliquer le théorème d'Ampère.

Pour ce qui est du segment, on sait que  $\vec{B}(M) = B(r, z)\vec{u}_\theta$  et on applique la loi de Biot et Savart.

Un point P du segment est le centre d'un élément de longueur  $dl = dz$  de l'axe. Le champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par l'élément de courant  $I dl$  se trouvant en P s'écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{u}_z \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

Dans la base cylindrique, on a :

$$\vec{PM} = (\vec{PO} + \vec{OM}) = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z, \text{ avec } PM = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Le champ élémentaire vaut donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I r dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \vec{u}_\theta.$$

Le champ magnétique n'a donc qu'une composante. Le champ total est la somme vectorielle des champs élémentaires créés par tous les points P de l'axe ; il s'écrit :

$$B_\theta = \int_{z=z_A}^{z_C} \frac{\mu_0 I r dz}{4\pi(\sqrt{r^2 + z^2})^3},$$

le vecteur  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique restant inchangé lorsque le point P décrit le segment AC, vu que M est fixe.

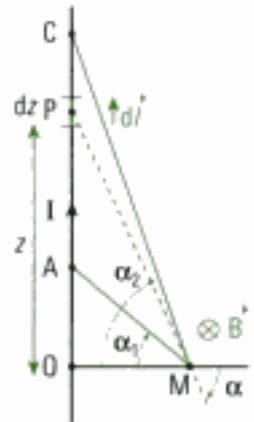
Changeons de variable en prenant l'angle  $\alpha$  tel que  $\tan \alpha = \frac{z}{r}$ . On a alors :

$$d(\tan \alpha) = (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \frac{dz}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{r},$$

car r reste inchangé.

Lorsque  $z \rightarrow z_A$ , alors  $\alpha \rightarrow \alpha_1$ , et  $z \rightarrow z_C$  correspond à  $\alpha \rightarrow \alpha_2$ .

En substituant :  $z = r \tan \alpha$ ,  $dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  et  $\sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\cos \alpha}$  dans l'intégrale, la composante du champ peut maintenant être calculée :



$$B_0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I r}{4\pi \left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^3} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \sin\alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

L'expression finale du champ magnétique en M est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \vec{u}_0.$$

### Exercice 3

En présence d'un fil rectiligne infini, le choix des coordonnées cylindriques s'impose et le champ magnétique créé en tout point M s'écrit (on pourra se reporter aux applications 1, 2 et 3 du cours pour de plus amples développements) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0.$$

Le rectangle est orthogonal au champ  $\vec{B}$  et on oriente sa normale  $\vec{n}$  dans le sens de  $\vec{B}$ . Tous les points du cadre se trouvant à la même distance  $r$  du fil sont soumis au même champ magnétique. On peut alors découper des éléments de surface ayant la forme de bandes de hauteur  $h$  et d'épaisseur  $dr$  :

$$dS = h dr,$$

dans lesquelles le champ magnétique est uniforme ( $r$  ne varie pas).

Le flux élémentaire  $d\phi$  à travers une telle bande s'écrit :

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0 \cdot h dr \vec{u}_0 = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

Le flux total  $\phi$  est la somme de tous ces flux élémentaires :

$$\phi = \int d\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_{r=a}^{r=a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \left[ \ln r \right]_a^{a+b} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

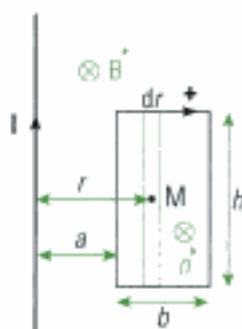
Si l'on n'avait pas considéré une bandelette d'épaisseur  $dr$ , mais bien l'élément de surface en coordonnées cylindriques, alors on aurait écrit :

$$dS = dr dz,$$

car en parcourant le cadre,  $r$  et  $z$  varient. Le flux aurait pris la forme d'une intégrale double :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{z=0}^z \int_{r=a}^{r=a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0 \cdot dr dz \vec{u}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_{r=a}^{r=a+b} \frac{dr}{r} \times \int_{z=0}^z dz = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

ce calcul restant plus long que le précédent.



## Exercices de niveau 2

### Exercice 4

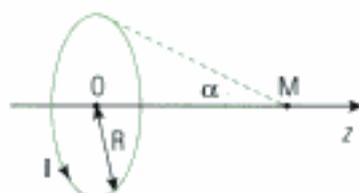
1) Une longueur  $L$  compte  $N$  spires. Donc, dans l'élément de longueur  $dz$ , on peut décompter :

$$dN = \frac{N}{L} dz \text{ spire(s).}$$

C'est une simple règle de trois.

2) Si l'on applique le résultat de l'Application 2 de la méthode n° 2, alors le champ magnétique, créé par une spire en un point M de son axe de révolution, vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R} \vec{u}_z,$$



où  $\alpha$  est le demi-angle sous lequel, depuis le point M, on voit la spire

Or, il y a  $dN$  spires, chacune parcourue par le courant d'intensité  $I$ . Le champ en M vaut alors :

$$d\vec{B} = dN \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z = \frac{N}{L} dz \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z.$$

3) Le solénoïde est constitué de l'assemblage des spires les unes contre les autres. Ainsi, le champ total est la somme des champs créés par l'ensemble des spires :

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2RL} \vec{u}_z \int \sin^3 \alpha dz.$$

Il faut choisir entre les variables d'intégration  $\alpha$  et  $z$ . L'énoncé préconise de garder  $\alpha$ . Ainsi, on note que  $\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{z}{R}$ . En différentiant :

$$\frac{-1}{\tan^2 \alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{R}, \text{ soit } dz = -R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

il vient :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 IN}{2RL} \vec{u}_z \int \sin^3 \alpha R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{\mu_0 NI}{2L} \vec{u}_z \left[ -\cos \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{u}_z.$$

4) Si le solénoïde devient infini, alors  $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ . Le champ magnétique vaut alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos 0 - \cos \pi) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 NI}{L} \vec{u}_z = \mu_0 n I \vec{u}_z,$$

où  $n = \frac{N}{L}$  est le nombre de spires par mètre.

On a bien retrouvé l'expression de l'Application 1 de la méthode n° 2.

## Exercice 5

1) Tous les plans contenant l'axe de révolution du disque passent par M et changent par symétrie le sens de rotation du disque, donc le sens du courant. Ce sont donc des plans d'antisymétrie pour les courants.

Le champ  $\vec{B}$  étant inclus dans chacun de ces plans, il est donc inclus dans leur intersection qui est l'axe (Oz) :

$$\vec{B} = B \vec{u}_z.$$

2) a) Le disque étant uniformément chargé en surface, on écrit  $dq = \sigma dS$ , où  $dS$  est la surface de la couronne :

$$dS = dr \times r d\theta = 2\pi r dr \quad \text{et} \quad dq = 2\pi \sigma r dr.$$

b) La charge a effectué un tour lorsque le disque l'a fait. La vitesse angulaire valant  $\omega$ , la durée d'un tour est  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

c) Un courant d'intensité  $di$  parcourant la spire, est égal au rapport de la charge qui a traversé une section de la spire par le temps nécessaire à cette traversée :

$$di = \frac{dq}{T} = 2\pi \sigma r dr \times \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr.$$

3) Le champ magnétique créé par une spire de rayon  $r$  parcourue par un courant d'intensité  $di$  en un point de son axe de révolution a déjà été calculé (Application 2 de la méthode n° 2). On s'en sert pour écrire le champ créé par cette spire élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 di \sin^3 \alpha}{2r} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr \sin^3 \alpha}{2r} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr \sin^3 \alpha}{2} \vec{u}_z.$$

Le champ magnétique total, créé par le disque entier, est la somme des champs créés par toutes les spires découpées dans le disque :

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_{r=0}^R \frac{\mu_0 \sigma \omega dr \sin^3 \alpha}{2} \vec{u}_z.$$

Mais  $r$  et  $\alpha$  sont liés, et il faut choisir une variable d'intégration. On prendra l'angle, plus adapté au formulaire donné par l'énoncé. Le lien entre  $\alpha$  et  $r$  vient de la relation :

$$\tan \alpha = \frac{r}{z}, \text{ qui donne } d(\tan \alpha) = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dr}{z}, \text{ soit } dr = \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

En remplaçant, il vient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \vec{u}_z \int_{r=0}^R dr \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \vec{u}_z \int_{\alpha=0}^{\alpha_0} \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \vec{u}_z \int_{\alpha=0}^{\alpha_0} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha,$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \vec{u}_z \left[ \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right]_0^{\alpha_0} = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha_0} + \cos \alpha_0 - 2 \right) \vec{u}_z,$$

où  $\alpha_0$  est le demi-angle sous lequel, depuis le point M, on voit la périphérie du disque.

## Exercices de niveau 3

### Exercice 6

Cherchons d'abord la direction du champ résultant  $\vec{B}$ . Les deux plans contenant l'axe (Ox) et parallèles aux côtés du carré sont des plans d'antisymétrie pour le courant qui traverse le carré. Ainsi, le champ résultant est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire l'axe (Ox) :

$$\vec{B} = B \vec{u}_x.$$

Pour calculer ce champ, on utilise le résultat de l'exercice 2 dans le but de superposer les champs magnétiques créés par chaque segment parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Un de ces champs a été écrit, en coordonnées cylindriques en prenant le segment comme axe (Oz) :

$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}_\theta.$$

Pour ce carré, M se trouve dans le plan médiateur de chacun des segments, on a ainsi :

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \text{ avec } \sin \alpha_2 = \frac{a}{2CM},$$

où C est une extrémité du segment.

En prenant un repère cartésien d'axes parallèles aux côtés du carré, on trouve :

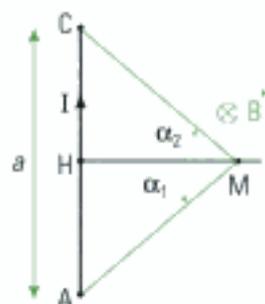
$$CM = \|\vec{CM}\| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}, \sin \alpha_2 = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 4x^2}}.$$

Il reste à exprimer la distance  $r = HM$  du point M à l'axe du fil en fonction de  $x$  et  $a$  :

$$HM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}.$$

Le champ  $\vec{B}_i$  créé par un des segments « i » s'écrit :

$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + x^2\right)\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)}} \vec{u}_\theta.$$



La figure ci-contre montre les deux champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  créés en M par les deux segments AC et DE orthogonaux au plan de la figure. Pour avoir le champ total, il faut projeter chaque champ  $\vec{B}_i(M)$  sur l'axe (Ox).

La projection donne :  $\vec{B}(M) = 4B_1 \sin\theta \vec{u}_x$ , où  $\theta$  est représenté ci-contre.

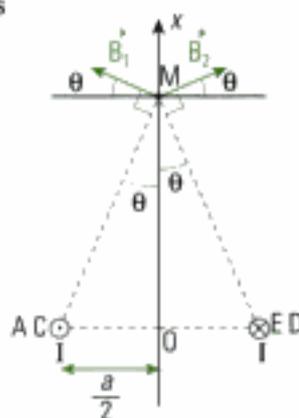
On a  $\sin\theta = \frac{a}{2HM} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}}$ , et finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} \vec{u}_x.$$

Lorsque  $x \gg a$ , on a  $x^2 \gg \frac{a^2}{4}$  et le champ se simplifie en :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x^3} \vec{u}_x.$$

Nous verrons au chapitre 7 qu'un champ magnétique proportionnel à l'inverse du cube de la distance peut être interprété comme le champ créé par un dipôle magnétique.



### Exercice 7

1) L'intensité totale I est la somme des intensités qui parcourent chaque fil, donc :

$$I = \int di = \int_{x=-a}^a k dx = k \times 2a, \text{ d'où } k = \frac{I}{2a}.$$

2) En coordonnées cylindriques, le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini et parcouru par un courant d'intensité I en un point M situé à la distance r du fil s'écrit, en coordonnées cylindriques et en prenant le fil comme axe (Oz) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

3) Le plan (yOz) est un plan de symétrie pour les courants du ruban et passe par M ; donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan :

$$\vec{B}(M) = B \vec{u}_x.$$

4) Comme il n'existe ni plan de symétrie, ni plan d'antisymétrie pour les courants du ruban et passant par un point ne faisant pas partie de l'axe (Oy), on ne connaît la direction du champ  $\vec{B}$  que sur l'axe (Oy). Les lignes de champ sont donc inconnues et le théorème d'Ampère ne pourra pas être appliqué victorieusement.

Il faut donc procéder par sommation. Vu les questions précédentes, on ajoutera les champs créés par tous les fils découpés dans le ruban, chaque fil ayant une épaisseur infinitésimale dx.

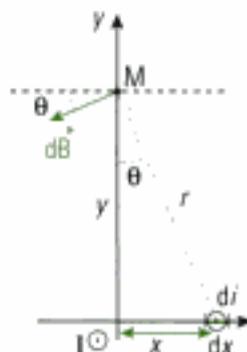
Chaque fil est parcouru par un courant d'intensité :

$$di = \frac{I}{2a} dx,$$

et crée un champ  $d\vec{B}$  en M (figure ci-contre).

Le champ résultant est la somme de ces champs élémentaires. Comme on connaît la direction de ce champ, on n'ajoutera que les composantes « utiles », c'est-à-dire la composante selon (Ox) de chaque champ élémentaire :

$$\vec{B} = \int dB_x \vec{u}_x = \vec{u}_x \int_{x=-a}^a \frac{-\mu_0 di}{2\pi r} \cos\theta = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \vec{u}_x \int_{x=-a}^a \frac{dx}{r} \cos\theta.$$



Or  $\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et donc :  $\vec{B} = \frac{-\mu_0 I y}{4\pi a} \vec{u}_x \int_{x=-a}^a \frac{dx}{x^2 + y^2}$ ,

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{-a}^a \vec{u}_x = \frac{-\mu_0 I}{2\pi a} \arctan\left(\frac{a}{y}\right) \vec{u}_x = \frac{-\mu_0 k}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{y}\right) \vec{u}_x.$$

5) Lorsque  $a$  devient infiniment grand, pour  $y$  fixé, le rapport  $\frac{a}{y}$  devient infini et :

$$\arctan\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Le champ s'écrit alors :

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 k}{2} \vec{u}_x,$$

où  $k$  est une densité de courant réparti sur un plan. On peut faire une analogie avec l'électrostatique pour ce qui est du champ créé par un plan uniformément chargé avec une densité  $\sigma$  :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Dans cette analogie,  $\mu_0$  joue un rôle équivalent à  $\frac{1}{\epsilon_0}$ .

## Exercice 8

1) Le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe de révolution ( $Oz$ ) d'une spire circulaire de rayon  $R$ , centre  $O$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$  vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{u}_z,$$

où  $\alpha$  est le demi-angle où l'on voit la spire depuis le point  $M$ .

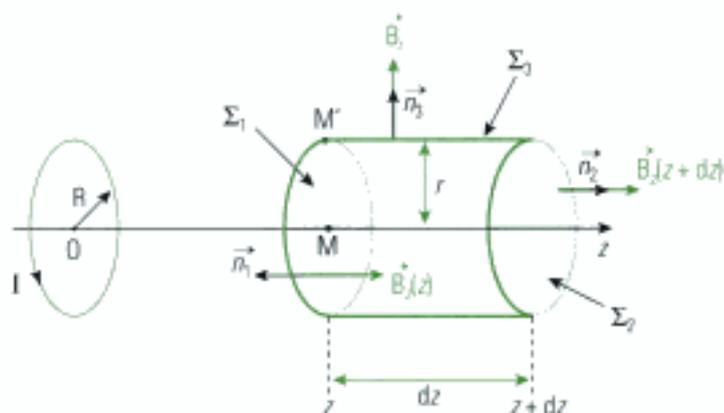
2) a) Le plan contenant l'axe ( $Oz$ ) et le point  $M'$  est un plan d'antisymétrie pour le courant de la spire. Donc  $\vec{B}(M')$  est inclus dans ce plan qui s'écrit, en coordonnées cylindriques,  $(M ; \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Le champ  $\vec{B}(M')$  n'a donc pas de composante selon  $\vec{u}_\theta$ .

De plus, on constate l'invariance par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), donc  $\|\vec{B}(M')\|$  ne dépend pas de  $\theta$ , variable de cette rotation.

b) Le cylindre est représenté ci-contre avec des dimensions agrandies par rapport à la réalité afin de rendre le schéma plus lisible.

Le cylindre est une surface fermée, constituée des bases  $\Sigma_1$  (à la cote  $z$ ) et  $\Sigma_2$  (à la cote  $z + dz$ ) et son enveloppe  $\Sigma_3$ . Le flux magnétique  $\phi$  est égal à la somme des trois flux :

$$\phi = \phi_{\Sigma_1} + \phi_{\Sigma_2} + \phi_{\Sigma_3}.$$



Pour calculer chaque flux, on tient compte de la composante du champ qui est colinéaire à la normale  $\vec{n}$  de la surface considérée. Il s'agit de la composante axiale  $\vec{B}_z$  pour les bases  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et de la composante radiale  $\vec{B}_r$  pour l'enveloppe  $\Sigma_3$  :

$$\phi_{\Sigma_1} = \vec{B}_z \cdot \vec{n}_1 dS = -\pi r^2 B_z(z) ; \quad \phi_{\Sigma_2} = \vec{B}_z \cdot \vec{n}_2 dS = \pi r^2 B_z(z + dz) ; \quad \phi_{\Sigma_3} = \vec{B}_r \cdot \vec{n}_3 dS = 2\pi r B_r dz.$$

$$\phi = \pi r^2 [B_z(z + dz) - B_z(z)] + 2\pi r B_r dz = \pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + 2\pi r B_r dz = \pi r^2 dz \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{2}{r} B_r \right).$$

On a en effet reconnu la définition de la dérivée car  $dz$  peut être aussi petit que l'on veut, et on a remplacé la dérivée partielle par une dérivée totale car  $B_z$  ne dépend que de  $z$ .

c) La surface de ce cylindre étant fermée, le flux est nul :

$$\phi = \pi r^2 dz \left( \frac{dB_z}{dz} + \frac{2}{r} B_r \right) = 0 \text{ donne } B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}.$$

Avec  $B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$ , on calcule :

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{3\mu_0 IR^2 rz}{4(\sqrt{R^2 + z^2})^5}.$$

On vérifie que lorsque  $r = 0$ , on a  $B_r = 0$ .

# Mouvement de particules chargées

## Introduction

C'est dans les grands accélérateurs de particules que des découvertes fondamentales sur la structure de la matière ont été faites : les chocs de particules ont permis de mettre en évidence les *quarks* dans les années 70. Le but de ce chapitre n'est pas de reprendre une étude des chocs entre particules dans les accélérateurs, mais de comprendre comment les particules chargées se meuvent lorsqu'elles sont plongées dans un champ électromagnétique.

La force de Lorentz, très supérieure au poids, met les particules en mouvement ou modifie leurs mouvements. Le champ électrostatique permet d'augmenter leur vitesse, le champ magnétique les dévie.

À partir d'hypothèses simplificatrices (champs uniformes et stationnaires), ce chapitre permet de comprendre les causes du mouvement de particules chargées.

### Plan du chapitre 7

A. La force de Lorentz. . . . .	170
B. Champ électrostatique uniforme	
1. Équations horaires et trajectoire. . . . .	170
2. Étude énergétique. . . . .	171
C. Champ magnétique uniforme	
1. Équations horaires et trajectoire. . . . .	172
2. Étude énergétique. . . . .	174
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre. . . . .	175
<i>Énoncés des exercices</i> . . . . .	179
<i>Indications</i> . . . . .	180
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	181

## A. La force de Lorentz

1. Nous avons déjà rencontré les deux termes de cette force. La force de Coulomb est en fait une partie de la force générale de Lorentz.

C'est la force qu'exerce un champ électromagnétique sur une charge électrique  $q$ . Son expression générale<sup>1</sup> comprend les effets du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

### Definition 1

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  exerce sur une particule de charge  $q$  et possédant la vitesse  $\vec{v}$  la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$\vec{f}$  force en newton (N)

$q$  charge en coulomb (C)

$\vec{E}$  champ électrostatique ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$\vec{v}$  vitesse ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\vec{B}$  champ magnétique (T)

2. Le module de la vitesse des particules reste très petit devant la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

3. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour ce qui est de l'étude du mouvement de particules chargées. En effet, la durée de cette étude n'excède jamais quelques secondes, durée négligeable devant celle caractéristique de rotation de la Terre.

4. Voir l'exercice 1 dont les résultats permettent de justifier cette approximation.

5. Il y a « statique » dans « électrostatique », c'est-à-dire indépendant du temps.

Pour étudier le comportement des particules chargées sous l'action de cette force, on se place dans le cadre de la mécanique newtonienne, ou classique<sup>2</sup>. On appliquera le principe fondamental de la mécanique (PFD) à la particule dans un référentiel galiléen, et en excluant tout changement de référentiel<sup>3</sup>.

Dans les études suivantes, on négligera l'action du poids dont le module reste négligeable<sup>4</sup> devant celui de toute force électromagnétique électrique ou magnétique.

## B. Champ électrostatique uniforme

La particule chargée est plongée dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  uniforme<sup>5</sup> et on néglige la pesanteur. Ce mouvement est étudié dans le vide.

### B.1. Équations horaires et trajectoire

On écrit le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour la particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  :

$$m \vec{a} = \vec{f} = q \vec{E}, \text{ soit } \vec{a} = \frac{q \vec{E}}{m}.$$

Le mouvement de la particule est uniformément accéléré.

Pour déterminer le vecteur position  $\vec{r} = \vec{OM}$  de la particule, on intègre deux fois l'expression précédente, puisque  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  et  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  :

$$\bullet \vec{v} = \frac{q \vec{E}}{m} t + \vec{v}_0, \text{ où } \vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) \text{ est la vitesse initiale ;}$$

$$\bullet \vec{r} = \frac{q \vec{E}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \text{ où } \vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) \text{ est la position initiale.}$$

Comme la force  $\vec{f} = q \vec{E}$  est uniforme, la trajectoire de la particule reste dans le plan  $(M_0; \vec{f}, \vec{v}_0)$ , où  $M_0$  est le point définissant la position de la particule à l'instant initial.

6. Si  $\vec{E}$  et  $\vec{v}_0$  sont colinéaires, alors il y a une infinité de choix possibles pour  $(Oz)$  ; si  $\vec{E}$  et  $\vec{v}_0$  ne sont pas colinéaires, alors il n'y a qu'un seul choix pour  $(Oz)$ .

Pour tracer cette trajectoire plane, on peut changer d'origine du repère et choisir  $M_0$  comme nouvelle origine, puis prendre comme axe  $(Ox)$  la direction de  $\vec{E}$  :  $\vec{E} = E \vec{u}_x$ , et enfin faire en sorte<sup>6</sup> que l'axe  $(Oz)$  soit orthogonal aux vecteurs  $\vec{E} = E \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_0$ .

On peut alors projeter la relation vectorielle précédente, avec  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_y$ , et  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ , pour obtenir les équations horaires :

$$x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_{0x}t ; y(t) = v_{0y}t.$$

On trouve l'équation de la trajectoire par élimination du temps  $t = \frac{y}{v_{0y}}$  :

$$x(t) = \frac{qE}{2mv_{0y}^2} y^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}} y.$$

Si  $v_{0y} \neq 0$ , alors il s'agit d'une parabole ; si  $v_{0y} = 0$ , alors c'est une droite<sup>7</sup> : l'axe (Ox).

7. La trajectoire est donc plane ou rectiligne, orthogonale à l'axe (Oz) judicieusement choisi.

8. Dans les chambres à brouillard ou les chambres à bulles, on a le tracé des trajectoires (circulaires ou paraboliques) des particules. Cela permet de remonter à des connaissances sur la particule (énergie, rapport  $q/m, \dots$ ), et par exemple séparer des isotopes.

#### Loi 1

Une particule chargée plongée dans un champ électrostatique uniforme décrit une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires, une droite décrite de manière uniformément accélérée dans le cas contraire<sup>8</sup>.

## B.2. Étude énergétique

La puissance  $P$  de la force de Coulomb vaut :  $P = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ . Elle est non nulle : l'énergie cinétique de la particule chargée change lors de son parcours.

On rappelle que la variation d'énergie cinétique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  du parcours est obtenue en intégrant la puissance précédente :

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f},$$

$$\text{or } P = \vec{f} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right), \text{ soit } ^9 :$$

$$\int_1^2 d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \int_1^2 P dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} = W_f,$$

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W_f = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \int_1^2 \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{r} = q(V_1 - V_2).$$

Si la particule se déplace vers les potentiels décroissants ( $V_1 > V_2$ ), sa charge, étant positive ( $q > 0$ ), alors la vitesse de la particule augmente, le travail de  $\vec{f}$  est positif et le déplacement de la particule est spontané.

On peut aussi écrire :

$$\frac{1}{2} mv_2^2 + qV_2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + qV_1 = E_c + E_p.$$

On retrouve le fait que l'énergie mécanique est conservée, vu que la seule force qui travaille est la force de Coulomb, conservative et associée à l'énergie potentielle électrostatique<sup>10</sup> :

$$E_p = qV, \text{ provenant de } \vec{f} = -\vec{\text{grad}}E_p.$$

#### Loi 2

La vitesse  $v$  de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle  $E_p = qV$ .

9. C'est la démonstration classique du théorème de l'énergie cinétique en mécanique du point.

10. L'ensemble de ces résultats n'est valable que dans le cadre de la mécanique classique (non relativiste). On propose, dans l'exercice 2, d'étudier les limites quantitatives de cette hypothèse.

## C. Champ magnétique uniforme

11. L'exercice 1, par ses applications numériques, nous garantit l'effet négligeable du poids devant la force de Lorentz.

12. On peut toujours choisir l'axe (Ox) orthogonal au plan (O;  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}_0$ ), c'est-à-dire aux deux vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{v}_0$ .

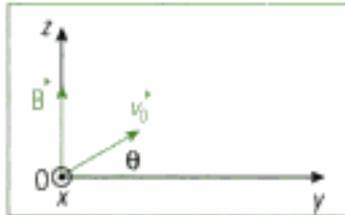


Fig. 1 - Le champ magnétique  $\vec{B}$  est porté par (Oz).

La particule chargée est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire, la pesanteur restant négligée<sup>11</sup>. Il n'y a pas de champ électrostatique. On considère que le mouvement a lieu dans le vide.

### C.1. Équations horaires et trajectoire

On choisit le repère de telle façon que le champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme soit porté par l'axe (Oz) :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ , avec  $B > 0$  (fig. 1). La particule se trouvant au point O à l'origine des dates  $t = 0$ . On choisit la position des axes (Ox) et (Oy) de telle manière que la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0)$  soit un vecteur du plan (Oyz)<sup>12</sup>.

#### C.1.1 - Lois horaires du mouvement

On écrit le principe fondamental pour la particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  :

$$m\vec{a} = \vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Exprimons les vecteurs dans la base cartésienne :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}; \quad \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc, en les projetant sur les axes :

$$\bullet \text{ sur (Ox), } m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y; \quad (1)$$

$$\bullet \text{ sur (Oy), } m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x; \quad (2)$$

$$\bullet \text{ sur (Oz), } \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport au temps et en combinant avec (2), on obtient l'équation différentielle vérifiée par  $v_x$  :

$$m \frac{d^2v_x}{dt^2} = qB \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q^2B^2}{m} v_x, \text{ soit } \frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{q^2B^2}{m^2} v_x = 0.$$

De même, en dérivant (2) et en utilisant (1) :

$$m \frac{d^2v_y}{dt^2} = -qB \frac{dv_x}{dt} = -\frac{q^2B^2}{m} v_y, \text{ soit } \frac{d^2v_y}{dt^2} + \frac{q^2B^2}{m^2} v_y = 0.$$

Les deux composantes  $v_x$  et  $v_y$  de la vitesse satisfont la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

En posant  $\omega = \frac{qB}{m}$ , grandeur homogène à une pulsation et appelée pulsation cyclotron, les solutions de ces équations s'écrivent :

$$v_x(t) = A\cos(\omega t) + H\sin(\omega t), \quad v_y(t) = D\cos(\omega t) + F\sin(\omega t), \quad v_z = G,$$

où A, H, D, F et G sont cinq constantes déterminées à partir des conditions initiales :

$$v_x(t = 0) = 0, \quad v_y(t = 0) = v_0\cos\theta \quad \text{et} \quad v_z(t = 0) = v_0\sin\theta.$$

Hidden page

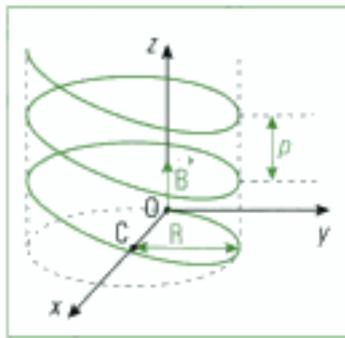


Fig. 3 - La particule  $M(m)$  décrit une hélice de pas  $p$ .

14. La force ne travaille pas, mais change la direction du vecteur vitesse, sans en changer le module. N'oublions pas que pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération n'est pas nulle.

Compte tenu des équations horaires et du cercle décrit dans le plan  $(Oxy)$ , on voit que  $\omega t$  représente physiquement l'angle  $(\vec{CO}, \vec{OM})$ , où  $M$  est le point auquel se trouve la particule chargée à l'instant  $t > 0$ .

Le pas de l'hélice est la distance parcourue le long de l'axe  $(Oz)$  lorsque le point  $M$  a fait un tour (fig. 3) :

$$\text{Pour } \omega t = 2\pi, z = p = v_0 \sin\theta \frac{2\pi}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} \sin\theta.$$

Lorsque  $\sin\theta = 0$ , c'est-à-dire lorsque les vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{v}_0$  sont orthogonaux, le pas est nul et on retrouve le fait que la trajectoire est alors circulaire.

## C.2. Étude énergétique

La puissance  $P$  de la force de Lorentz vaut :

$$P = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0.$$

En effet, le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  est orthogonal à chacun des deux vecteurs qui le constitue, donc à  $\vec{v}$ , et le produit scalaire avec  $\vec{v}$  est nul.

Par conséquent, la force magnétique ne travaille pas et l'application du théorème de l'énergie cinétique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la trajectoire donne :

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W_f = \int_1^2 P dt = 0, \text{ soit } v_2 = v_1.$$

### Loi 4

Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse  $v$  constante.

# L'essentiel

## ✓ Champ électromagnétique ( $\vec{E}$ , $\vec{B}$ )

Le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) exerce sur une particule de charge  $q$  et possédant la vitesse  $\vec{v}$  la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

## ✓ Champ électrostatique $\vec{E}$

- Dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$ , une particule chargée  $q$  décrit :
  - une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires ;
  - une droite de manière uniformément accélérée si la vitesse initiale et le champ électrostatique sont colinéaires.
- La vitesse  $v$  de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle  $E_p = qV$ .

## ✓ Champ magnétique $\vec{B}$

- Dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , la particule chargée décrit :
  - une hélice circulaire de pas constant avec une vitesse angulaire constante  $\omega = \frac{qB}{m}$  si la vitesse initiale n'est pas orthogonale au champ magnétique ;
  - un cercle de rayon  $R = \frac{mv}{qB}$  dans un plan orthogonal au champ magnétique si la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique.
- Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse  $v$  constante.

# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment déterminer le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique ?

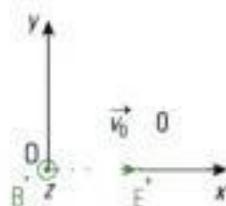
Soit une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  plongée dans un champ électromagnétique uniforme  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Compte tenu de conditions initiales données, déterminer la trajectoire décrite par cette particule.

#### → Savoir faire

- 1 Faire un bilan des forces.
- 2 Écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD). Le projeter sur les trois axes et obtenir l'équation différentielle que satisfait chacune des composantes de la vitesse de la particule.
- 3 Écrire la solution générale de chacune des équations différentielles précédentes. Compter les constantes qui sont apparues.
- 4 Exprimer les conditions initiales. Vérifier qu'il y en a autant que de constantes d'intégration, puis déterminer les constantes et écrire les lois horaires de chacune des composantes de la vitesse.
- 5 Intégrer ces composantes pour obtenir les lois horaires de la position de la particule. Les trois constantes sont calculées en utilisant la position initiale.
- 6 Tracer la trajectoire, commenter éventuellement.

#### → Application

Déterminer la trajectoire décrite par une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  plongée dans un champ électromagnétique uniforme  $\vec{E} = E\vec{u}_x$  et  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ , sachant qu'à  $t = 0$ , elle se trouve à l'origine  $O$  du repère et sans vitesse initiale.



#### Solution

1 Le poids est négligeable devant toute force électromagnétique. La seule force qui s'applique est la force de Lorentz généralisée :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

2 Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Pour projeter cette équation vectorielle sur les axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , on projette chacun des vecteurs en les exprimant sous forme de « vecteurs colonne » :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}; \quad \vec{E} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hidden page

•  $v_x(t=0) = 0$  donne  $C = 0$  et  $\frac{dv_x}{dt}(t=0) = \frac{qE}{m}$  donne  $C' = \frac{E}{B}$ .

On peut maintenant écrire les lois horaires des composantes de la vitesse :

$$v_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right), \quad v_y(t) = \frac{E}{B} \left[-1 + \cos\left(\frac{qB}{m} t\right)\right] \quad \text{et} \quad v_z = 0.$$

③ Il reste à intégrer les trois composantes de la vitesse :

• la primitive de  $\frac{dz}{dt} = 0$  est  $A''$  ;

•  $\frac{dx}{dt} = v_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$  s'intègre en  $x(t) = -\frac{mE}{qB^2} \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) + C''$  ;

•  $\frac{dy}{dt} = \frac{E}{B} \left[-1 + \cos\left(\frac{qB}{m} t\right)\right]$  donne  $y(t) = -\frac{E}{B} t + \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) + D''$  ;

où  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  sont trois constantes que l'on détermine en utilisant la position initiale.

À l'instant  $t = 0$ , le point est à l'origine  $O$  du repère, ce qui permet d'obtenir :

$$A'' = 0, \quad C'' = \frac{mE}{qB^2} \quad \text{et} \quad D'' = 0.$$

Les lois horaires de position sont :

•  $x(t) = \frac{mE}{qB^2} \left[1 - \cos\left(\frac{qB}{m} t\right)\right]$  ;

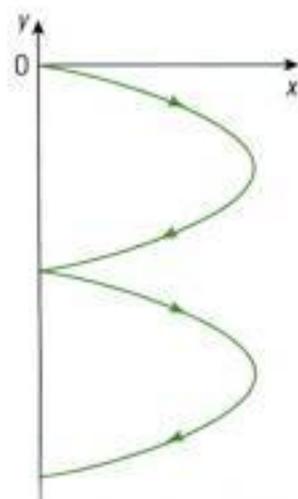
•  $y(t) = -\frac{E}{B} t + \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$  ;

•  $z(t) = 0$ .

③ Les équations horaires ne font pas apparaître une trajectoire classique (cercle, ellipse ...).

On peut tout de même voir qu'elle est plane, car contenue dans le plan  $(Oxy)$ .

On utilise une calculatrice numérique pour la tracer et on reconnaît une cycloïde.



La méthode proposée n'est pas la seule possible. L'exercice 9 propose une autre méthode pour résoudre le même problème (aux conditions initiales près), et l'exercice 5 fournit une troisième méthode en utilisant les nombres complexes.

Si l'on compare ces trois méthodes, on voit que celle développée ici propose de dériver la vitesse, puis de l'intégrer par la suite : la composante de la vitesse vérifie alors une équation différentielle du second ordre. En résolvant cette équation différentielle du second ordre, on a intégré deux fois. Cette méthode peut paraître inutile ou lourde, mais possède l'avantage de ne faire intervenir que des équations différentielles connues dont on sait écrire directement la solution.

La méthode proposée dans l'exercice 9, amène à opérer un calcul plus court, vu que l'on ne dérive pas pour intégrer par la suite. La difficulté réside dans le fait que l'équation différentielle obtenue n'est plus « classique », car le second membre est une fonction du temps : on ne peut plus en écrire « directement » la solution générale. Il faut donc maîtriser de manière plus approfondie l'outil mathématique, ou avoir des indications complémentaires.

Enfin, la méthode qui utilise les nombres complexes (exercice 5) est très rapide dans le cas du mouvement d'une particule dans un champ magnétique : on obtient une équation différentielle du premier ordre, à résoudre dans le corps des complexes. Mais lorsqu'il y a superposition avec un champ électrostatique, le traitement par les nombres complexes est plus délicat.

Ces trois méthodes étant philosophiquement très différentes (la première, la plus longue, ne procure que des équations connues et ne réserve aucune mauvaise surprise ; la deuxième, plus rapide, laisse résoudre des équations différentielles plus originales ; la troisième nous impose de maîtriser les nombres complexes), il convient de les pratiquer toutes les trois afin de faire son choix.

# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1 Valeur limite du champ électrostatique

On souhaite connaître la valeur limite  $E$  du champ électrostatique pour laquelle le poids n'est plus négligeable. On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ .

Pour quelles valeurs de  $E$  le poids dépasse-t-il le centième de la force de Coulomb ?

Faire l'application numérique.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

### Ex. 2 Vitesse relativiste d'un électron

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ .

1) On souhaite connaître la valeur limite  $U$  de la tension pour laquelle un électron, initialement sans vitesse, acquiert une vitesse relativiste. Pour quelles valeurs de  $U$  la vitesse de l'électron dépasse-t-elle le centième de la vitesse  $c$  de la lumière ?

Faire l'application numérique.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Refaire l'application numérique pour un proton de masse  $m' = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

2) On applique la tension  $\frac{U}{1000}$  pour accélérer l'électron, puis celui-ci quitte la région où existe le champ électrostatique et entre dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au vecteur vitesse.

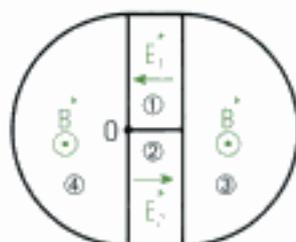
Pour quelles valeurs de  $B$  le poids dépasse-t-il le centième de la force de Lorentz ?

Faire l'application numérique pour l'électron, puis pour le proton. Conclure.

## Niveau 2

### Ex. 3 Un cyclotron

Le cyclotron est schématisé ci-contre. On lâche au point  $O$  une particule de charge  $q > 0$  sans vitesse initiale, et on cherche à connaître son mouvement ultérieur. En vue de dessus, les zones demi-circulaires sont plongées dans un champ magnétique uniforme de module  $B$ , et entre ces zones, une bande de



largeur  $d$  est plongée dans un champ électrostatique de module  $E$ , mais dont le sens change :

$$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = E.$$

1) Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région ① avant qu'elle ne pénètre la région ③ où règne le champ magnétique ? Calculer la vitesse  $v_1$  de la charge  $q$  lorsqu'elle pénètre dans cette région ③.

2) Dans cette région ③, quelle est la nature du mouvement ? Déterminer la trajectoire parcourue ainsi que ses caractéristiques.

3) Lorsque la particule pénètre dans la région ②, quelle est sa vitesse ? Lorsqu'elle en sort, quelle est sa vitesse  $v_2$  ?

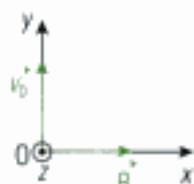
4) Après  $n$  passages dans une des régions ① ou ②, quelle est la vitesse  $v_n$  de la particule et les caractéristiques de la trajectoire parcourue dans celle des régions ③ ou ④ dans laquelle elle se trouve ?

5) On peut mesurer le temps passé par la particule dans l'une des régions ③ ou ④. Montrer que cette durée reste constante au cours du mouvement et permet de calculer le rapport  $q/m$ .

### Ex. 4 Trajectoire d'une particule

On cherche la trajectoire décrite par une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  plongée dans un champ électromagnétique stationnaire et uniforme :

$$\vec{E} = E\vec{u}_z \text{ et } \vec{B} = B\vec{u}_z,$$



sachant qu'à  $t = 0$ , elle se trouve à l'origine  $O$  du repère et avec la vitesse initiale :  $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ .

1) Écrire les équations différentielles couplées satisfaites par les composantes du vecteur vitesse.

2) Déterminer la loi horaire  $x(t)$ .

3) On utilise les nombres complexes pour trouver les deux autres lois horaires : on pose  $\underline{g} = g_y + jg_x$ , où  $j^2 = -1$ .

a) Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\underline{g}$ .

b) Résoudre cette équation.

c) En déduire les lois  $y(t)$  et  $z(t)$ .

4) Tracer l'allure de la trajectoire.

## Niveau 3

### Ex. 5 Conduction du cuivre

On étudie dans ce modèle la conduction dans les métaux (ici, le cuivre). La portion de conducteur étudiée est rectiligne et cylindrique de rayon  $R$ .

La densité du cuivre est  $d$  et sa masse molaire atomique  $M$ . On note  $N$  le nombre d'Avogadro. On suppose que chaque atome de cuivre peut libérer un électron de conduction de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ . On note  $\rho_0$  la masse volumique de l'eau.

Données :

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ ,  $M = 63,5$  g·mol<sup>-1</sup>,  
 $R = 0,5$  mm,  $E = 10$  V·m<sup>-1</sup>,  $d = 8,95$ ,  $\rho_0 = 1$  kg·L<sup>-1</sup>,  
 $h = 2,2 \cdot 10^{-15}$  kg·s<sup>-1</sup>,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

1) Déterminer l'expression de  $n$ , nombre de porteurs de charges mobiles par unité de volume. Faire l'application numérique.

2) On suppose que le courant dans le conducteur est imposé par une source de tension continue : le champ électrostatique  $\vec{E}$  dans le cuivre est uniforme et stationnaire. On modélise les interactions entre le réseau cristallin et les charges mobiles par une force de frottements de type fluide et de coefficient  $h$ .

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'une charge mobile ?

b) Montrer qu'après un régime transitoire dont on déterminera l'ordre de grandeur de la durée  $\tau$ , la vitesse de la charge mobile devient égale à une constante  $v_0$  dont on donnera l'expression. Faire les applications numériques. Discuter.

3) Dans toute la suite, on se place en régime permanent établi. On étudie dans cette question la densité de courant dans le cuivre.

a) Pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$ , quelle charge  $dq$  traverse une section droite  $s$  de ce conducteur ?

b) En déduire la densité de courant  $j$  définie par la quantité de charge qui traverse l'unité de surface du conducteur par unité de temps.

4) La conductivité  $\gamma$  du cuivre est définie par la relation  $j = \gamma E$ . Calculer cette grandeur dans ce modèle grossier.

Comparer avec la vraie valeur  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$  S·m<sup>-1</sup>. Conclure.

### Ex. 6 Vitesse et trajectoire d'une particule

On considère une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  plongée dans un champ électromagnétique stationnaire et uniforme :

$$\vec{E} = E \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{u}_z,$$

sachant qu'à  $t = 0$ , elle se trouve à l'origine  $O$  du repère et avec la vitesse initiale :

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x.$$

1) Déterminer les équations différentielles satisfaites par les composantes du vecteur vitesse.

2) Trouver la loi  $x(t)$ .

3) Intégrer une fois les deux équations restantes, et calculer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales.

4) En déduire l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la coordonnée  $y$ .

5) Écrire la solution générale  $y_0(t)$  de l'équation précédente sans second membre, puis chercher une solution particulière  $y_1(t)$  de l'équation « complète » sous la forme d'un polynôme du premier degré (loi affine du temps).

6) Écrire la solution générale  $y(t)$  de l'équation de la question 4) et calculer les constantes d'intégration.

7) En déduire la loi  $x(t)$ .

8) Tracer l'allure de la trajectoire.

## Indications

### Ex. 2

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

### Ex. 3

Faire un raisonnement par récurrence.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

La force de Coulomb a pour intensité, pour un électron :

$$F = \|\vec{F}\| = |q|E = eE.$$

Le poids  $P = mg$  dépasse un centième de la force de Coulomb lorsque  $P > \frac{F}{100}$ , soit :

$$E < \frac{100mg}{e}.$$

A.N. :  $E < 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ V/m}$ .

C'est une valeur extrêmement faible. Les champs électrostatiques résiduels dans l'air ambiant ont un ordre de grandeur de quelques volts par mètre, et ceux avec lesquels on crée les mouvements de particules afin de les étudier sont bien supérieurs. Le poids reste donc infinitésimal devant toute force de Coulomb.

### Exercice 2

1) On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial dans lequel est l'électron au repos et l'état final dans lequel il possède la vitesse  $v$  après avoir été accéléré sous la tension  $U$  :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^B -e\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B e \text{grad}V \cdot d\vec{l} = e(V_B - V_A) = eU, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

On étudie le cas où :  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} > \frac{c}{100}$ , soit  $U > \frac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}$ .

A.N. : pour l'électron  $U > 25,6 \text{ V}$  et pour le proton  $U > 47 \text{ kV}$ .

Il est donc très simple de rendre un électron relativiste, ce qui est plus compliqué pour le proton.

2) On applique la tension  $U' = \frac{U}{1000}$  à la particule, avec :

$$U > \frac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}, \text{ soit } U' = \frac{mc^2}{2 \cdot 10^7 e}.$$

On a alors :  $\frac{1}{2}mv^2 = eU' = \frac{mc^2}{2 \cdot 10^7}$  soit  $v = 9,5 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cette vitesse ne dépend pas de la masse et sa valeur est la même pour l'électron et le proton, au vu du cahier des charges.

La valeur de la force de Lorentz est :  $F = evB$ , le poids valant  $P = mg$ .

Le poids dépasse le centième de la force de Lorentz lorsque :

$$mg > \frac{evB}{100}, \text{ soit } B < \frac{100mg}{ev}.$$

A.N. : pour l'électron  $B < 5,9 \cdot 10^{-14} \text{ T}$  et pour le proton  $B < 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ T}$ .

Dans les études du mouvement des particules, on travaille avec des champs magnétiques nécessairement supérieurs à  $0,1 \text{ T}$ , afin de négliger l'effet du champ magnétique terrestre dont l'ordre de grandeur est de quelques  $10^{-5} \text{ T}$ . Le poids reste donc très négligeable devant la force de Lorentz.

## Exercices de niveau 2

### Exercice 3

1) Le poids étant négligé devant la force électrostatique, on écrit  $m\vec{a} = q\vec{E}$ , et donc l'accélération  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$  est uniforme. Comme la vitesse initiale est nulle, la primitive de l'accélération est :

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m} t.$$

Le mouvement est donc rectiligne uniformément accéléré.

Prenons l'axe (Ox) dans le sens du mouvement ; la position est :

$$x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + x(t=0) = \frac{qE}{2m} t^2.$$

Lorsque la particule atteint la limite de la région ①,  $x = d$ , et donc :

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{2md}{qE}}.$$

La vitesse vaut alors :  $v_1 = v(t_1) = \frac{qE}{m} t_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$ .

2) La particule pénètre dans la région ③ dans laquelle règne un champ magnétique uniforme avec un vecteur vitesse orthogonal au champ magnétique.

Le problème se situe dans le cadre du cours, paragraphe C, avec  $\theta = 0$  (on n'en rappelle que les résultats, la démonstration étant consultable dans le cours).

Le mouvement est circulaire et effectué à vitesse uniforme et le rayon du cercle est donné par :

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_1}{qB}.$$

3) Compte tenu de ce qui précède, la vitesse n'a pas changé dans la région ③ et lorsque la particule pénètre dans la région ②, sa vitesse est  $v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$ .

Dans la région ②, le mouvement de la particule reste uniformément accéléré, mais la vitesse initiale est  $v_1$ , la vitesse finale étant nommée  $v_2$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les deux positions extrêmes, c'est-à-dire à l'entrée et à la sortie de la région ②. La force électrostatique effectue un travail moteur  $W$  (positif) que l'on exprime :

$$W = \int_{\text{②}} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = qE \times dl = qE \times d,$$

et le théorème de l'énergie cinétique prend la forme :

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W = qEd, \text{ soit } v_2^2 = v_1^2 + \frac{2qEd}{m} = \frac{4qEd}{m}.$$

Au final :  $v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}$ .

4) La particule a effectué deux passages dans l'une ou l'autre des régions ① ou ② et sa vitesse est :

$$v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}} = \sqrt{2 \times \frac{2W}{m}}.$$

Lorsqu'elle n'avait effectué qu'un seul passage, elle valait :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} = \sqrt{1 \times \frac{2W}{m}}.$$

À chaque passage, son énergie cinétique augmente de la quantité  $W$ , de sorte qu'après  $n$  passages, on a :

$$\frac{1}{2} m v^2 = n \times W, \text{ donc } v = v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}.$$

5) Après  $n$  passages dans l'une des régions ① ou ②, la particule effectue un mouvement circulaire uniforme dans l'une ou l'autre des parties ③ ou ④. Le rayon de ce cercle est :

$$R_n = \frac{m v_n}{qB}.$$

Dans la région ③ ou ④ dans laquelle la particule se trouve, elle effectue un demi-cercle de rayon  $R_n$  à la vitesse  $v_n$ . Le temps mis pour faire ce trajet est :

$$t_n = \frac{\pi R_n}{v_n}, \text{ c'est-à-dire } t_n = \frac{\pi}{v_n} \times \frac{m v_n}{qB} = \frac{\pi m}{qB}.$$

Cette durée est indépendante de  $n$ . Lorsqu'on la mesure, on peut remonter au rapport  $\frac{q}{m} = \frac{\pi}{tB}$ .

#### Exercice 4

1) Le poids est négligeable devant toute force électromagnétique (cf. exercices 1 et 2). La seule force qui s'applique est la force de Lorentz généralisée  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

Le principe fondamental s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Pour projeter cette équation vectorielle sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz), on exprime chacun des vecteurs sous forme de vecteurs colonne :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}; \quad \vec{E} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{B} \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bv_z \\ -Bv_y \end{pmatrix},$$

puis on les projette sur les axes :

• sur (Ox),  $m \frac{dv_x}{dt} = qE$ ; (1)

• sur (Oy),  $m \frac{dv_y}{dt} = qBv_z$ ; (2)

• sur (Oz),  $m \frac{dv_z}{dt} = -qBv_y$ . (3)

2) L'équation différentielle (1) peut être résolue directement :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{qE}{m} t + A \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + At + A',$$

où  $A$  et  $A'$  sont deux constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales.

À l'instant initial  $t = 0$ , on a  $x = 0$  et  $\frac{dx}{dt} = 0$ , ce qui donne :

$$A = A' = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{qE}{2m} t^2.$$

3) a) Il faut faire apparaître  $\underline{\alpha} = v_y + jv_z$ . Vu les membres de droite des équations (3) et (2), en multipliant (2) par  $-j$  et en ajoutant les deux équations membre à membre, il vient :

$$m \frac{dv_z}{dt} - jm \frac{dv_y}{dt} = -qB(v_y + jv_z), \text{ soit } -jm \frac{d\underline{\alpha}}{dt} = -qB\underline{\alpha}, \text{ ou } \frac{d\underline{\alpha}}{dt} + \frac{jqB}{m} \underline{\alpha} = 0.$$

b) On a obtenu une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants du type

$\frac{d\underline{\alpha}}{dt} + \frac{1}{\tau} \underline{\alpha} = 0$  et dont la solution est :

$$\underline{\alpha}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

# Index

## A

Ampère (théorème d'), 152

## B

Biot et Savart (loi de), 143

## C

Champ électrostatique

- créé par une charge ponctuelle, 34
- créé par plusieurs charges ponctuelles, 34
- créé par une distribution linéique de charges, 35
- créé par une distribution surfacique de charges, 35
- créé par une distribution volumique de charges, 35

Champ gravitationnel

- créé par une masse ponctuelle, 118
- créé par plusieurs masses ponctuelles, 118
- créé par une distribution linéique de masses, 118
- créé par une distribution surfacique de masses, 119
- créé par une distribution volumique de masses, 119

Champ magnétique, 142

Charges

- définition, 9
- (densité linéique de), 10
- (densité surfacique de), 10
- (densité volumique de), 10

Continuité

- de  $\vec{E}$ , 36
- de  $\vec{V}$ , 70
- de  $\vec{G}$ , 119

Coulomb (loi de), 8

## D

Debye (définition du), 98

Densité

- linéique de charges, 10
- surfacique de charges, 10
- volumique de charges, 10

Dipôle électrostatique, 97, 98

## E

Électrostatique, 7, 33, 67, 97

Énergie potentielle

- électrostatique, 73, 74, 75, 76
- gravitationnelle, 122, 123, 124

## F

Flux

- électrostatique, 42, 43
- magnétique, 149, 150, 151

Force de Lorentz, 170

## G

Gauss (théorème de), 43, 121

Gradient

- en coordonnées cartésiennes, 82
- en coordonnées cylindriques, 82
- en coordonnées sphériques, 82

## L

Lorentz (force de), 170

## M

Moment dipolaire (définition), 98

## **P**

### **Potentiel électrostatique**

- créé par une charge ponctuelle, 69
- créé par plusieurs charges ponctuelles, 69
- créé par une distribution linéique de charges, 69
- créé par une distribution surfacique de charges, 70
- créé par une distribution volumique de charges, 70

## **S**

**Solénoïde**, 155

**Solénoïde infini**, 154

**Surface fermée (normale à une)**, 149

## **T**

**Tesla (définition du)**, 142

### **Théorème**

- d'Ampère, 152
- de Gauss, 43, 121

**Tubes de champ**, 150

## **V**

**Volt (définition du)**, 69

**Volt par mètre (définition du)**, 34



Hidden page



Titres disponibles en première année dans la filière MPSI...

**En Physique**

Optique MPSI-PCSI-PTSI  
Mécanique MPSI  
Électrocinétique MPSI  
Électromagnétisme MPSI  
Thermodynamique MPSI

**En Chimie**

Chimie MPSI

**En Mathématiques**

Analyse MPSI  
Algèbre et géométrie MPSI

**Livres d'exercices**

Mathématiques MPSI  
Physique MPSI

LES NOUVEAUX  
**Précis**  
B R É A L

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la **collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

Réf. : 209.0343

ISBN : 2 7495 0226 8



Copyrighted material